Dr. Sudi Prayitno, M.Si.
Tabita Wahyu Triutami, S.Pd., M.Pd.
Dwi Novitasari, S.Pd., M.Pd.
Ratna Yulis Tyaningsih, S.Pd., M.Pd.

Teori Peluang

PENERBIT LITPAM
Bersama Menyebar Ilmu

Teori Peluang

Teori Peluang
Penulis: Dr. Sudi Prayitno, M.Si.
Tabita Wahyu Triutami, S.Pd., M.Pd.
Dwi Novitasari, S.Pd., M.Pd.
Ratna Yulis Tyaningsih, S.Pd., M.Pd.
Editor: **Dr. Sri Subarinah, M.Si.**
Desain cover: Tim LITPAM
Diterbitkan oleh: LITPAM – Perumahan Lingkar Permai III, Blok Q4, Tanjung Karang, Sekarbela, Kota Mataram, NTB
Email: litpam.press@gmail.com
Website: https://penerbit.litpam.com
No. Tanda Anggota IKAPI: 008/Anggota Luar Biasa/NTB/2021
Hp. +6287865262538
Tahun Cetak: Februari, 2023

ISBN: 978-623-90021-5-2

PENERBIT LITPAM
Bersama Menyebar Ilmu

IKAPI
IKATAN PENERBIT INDONESIA

KATA PENGANTAR

Puji syukur saya panjatkan kehadirat Allah SWT atas terselesaikannya buku ajar untuk mata kuliah Teori Peluang. Buku ajar ini ditulis untuk melengkapi bahan bacaan mahasiswa program studi Pendidikan Matematika.

Buku ini menyajikan topik-topik teori peluang yang dibagi dalam enam Bab, yaitu permutasi, kombinasi, peluang, peluang bersyarat, peubah acak dan pemecahan masalah teori peluang. Materi-materi yang disajikan dalam buku ini dipergunakan untuk perkuliahan Teori Peluang dengan beban 2 SKS.

Tiada gading yang tak retak, demikian pula dengan buku ajar ini. Oleh karenanya saran dan kritik dari para pembaca sangat diharapkan untuk meningkatkan kualitas buku ini di masa mendatang. Akhirnya penulis berharap buku ini dapat bermanfaat, terutama untuk mahasiswa semester pertama Program Studi Pendidikan Matematika yang memprogramkan mata kuliah Teori Peluang.

Mataram, Februari 2023

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

TINJAUAN MATA KULIAH

Setelah mempelajari buku ini diharapkan mahasiswa mengenal, memahami dan mampu menerapkan konsep-konsep dan teorema-teorema dalam teori peluang. Kemampuan akhir mahasiswa akan penguasaan konsep dasar peluang disajikan dalam enam bab, yaitu

Bab 1. Permutasi

Prinsip Dasar Perhitungan, Permutasi, Permutasi dengan Pengulangan, dan Sampel Terurut.

Bab 2. Kombinasi

Kombinasi, Partisi dan Partisi Silang, Partisi Terurut dan Partisi Tidak Terurut.

Bab 3. Peluang

Ruang Sampel dan Kejadian, Peluang, Peluang Geometri, Peluang Kejadian Majemuk, Peluang Kejadian Komplementer, Kejadian Saling Bebas dan Saling Lepas, Ruang Probabilitas Hingga dan Ruang Probalilitas Sama

Bab 4. Peluang Bersyarat

Defnisi Peluang Bersyarat, Aturan dan Teorema Perkalian Peluang, Proses Stokastik Hingga, dan Kebebasan,

Bab 5. Peubah Acak

Percobaan bebas atau berulang, Peubah Acak, Distribusi Peubah Acak, Nilai Harapan, Permainan.

Bab 6. Pemecahan Masalah Teori Peluang

Pemecahan Masalah Teori Peluang dari Soal-soal Kompetisi Matematika

Untuk memperoleh penguasaan kemampuan akhir yang disajikan dalam enam bab tersebut, mahasiswa dapat mempelajari buku ini dan menyelesaikan permasalahan-permasalahan teori peluang yang disajikan pada tiap akhir bab.

BAB 1
PERMUTASI

KEMAMPUAN AKHIR

Mahasiswa dapat menentukan permutasi dari suatu susunan berbentuk baris lurus maupun melingkar

CAPAIAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat menggunakan prinsip dasar perhitungan untuk menentukan banyaknya suatu kejadian ataupun ruang sampel
2. Mahasiswa dapat menurunkan rumus permutasi k objek dan n objek yang diberikan
3. Mahasiswa dapat menentukan banyaknya permutasi yang memuat unsur-unsur yang sama
4. Mahasiswa dapat menentukan permutasi dengan formasi melingkar

PENYAJIAN

Dalam bab ini dikaji mengenai prinsip dasar perhitungan yang merupakan hal mendasar untuk menurunkan rumus permutasi maupun kombinasi. Penyajian dilakukan melalui ilustrasi-ilustrasi untuk memudahkan pemahaman mahasiswa mengenai fenomena kombinatorika yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Setelah dirumuskan permutasi untuk k objek dari n objek yang diberikan, dikembangkan pula permutasi dengan sejumlah unsur pengulangan serta permutasi dalam formasi melingkar yang dikenal dengan permutasi siklis.

URAIAN MATERI

Permutasi merupakan bagian dari ilmu kombinatorika, yaitu merupakan studi yang mengkaji tentang permutasi, kombinasi dan prinsip dasar perhitungan untuk menentukan besarnya kemungkinan logis dari suatu kejadian tanpa perlu banyak melakukan perhitungan atau pendaftaran.

Prinsip Dasar Perhitungan

Prinsip dasar perhitungan digunakan untuk memudahkan menghitung banyaknya kejadian-kejadian dalam suatu ruang sampel. Berikut ini diberikan ilustrasi untuk memahami fenomena aturan perkalian dalam membilang.

Ilustrasi 1.

Misalkan dari kota P ke kota Q ada lima jalur penerbangan langsung, dan dari kota Q ke kota R ada tiga jalur penerbangan langsung. Ada berapa macam jalur penerbangan dari kota P ke kota R melalui kota Q ? Untuk mencari solusi dari masalah tersebut dapat diikuti penalaran sebagai berikut:
Misalkan jalur penerbangan dari kota P ke kota Q dimisalkan a, b, c, d, dan e, sedangkan jalur penerbangan langsung dari kota Q ke kota R dimisalkan 1, 2, dan 3.

Maka jalur penerbangan dari kota P ke kota R yang melalui Q adalah $(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), \ldots, (e,3)$

Dari P ke Q mempunyai 5 jalur dan dari setiap jalur dapat ditentukan 3 jalur ke R.

Jadi seluruhnya ada 5×3 jalur penerbangan.

Aturan Perkalian

Jika proses P_1 dapat dilakukan dalam n_1 cara, proses P_2 dapat dilakukan dalam n_2 cara, …, proses P_k dapar dilakukan dalam n_k cara, maka rangkaian proses (P_1, P_2, P_3, …, P_k) dapat dilakukan dalam

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k.$$

Permutasi

Suatu himpunan yang terdiri dari n objek yang diberikan berdasarkan urutan disebut permutasi dari objek-objek tersebut. Suatu susunan r (kurang dari atau sama dengan n) objek dari n objek-objek tersebut yang diberikan berdasarkan urutan disebut permutasi r dari n atau Permutasi n objek diambil r, dilambangkan P_k^n, ${}_nP_k$, atau $P(n, k)$. Selanjutnya dalam buku ini digunakan notasi $P(n, k)$.

Perhatikan himpunan huruf $\{a, b, c, d, e\}$. maka diperoleh

(1) *abcde*, *abced*, *abdec*, *abdce*, merupakan contoh permutasi dari 5 huruf diambil 5 huruf

(2) *abcd*, *abce*, *abec*, *cdab*, merupakan contoh permutasi dari 5 huruf diambil 4 huruf

(3) *abc*, *abd*, *cde*, *ced*, *abe*, merupakan contoh permutasi dari 5 huruf diambil 3 huruf

(4) *ab*, *ac*, *ad*, *bc*, *de*, *ea*, merupakan contoh permutasi dari 5 huruf diambil 2 huruf

(5) *a*, *b*, *c*, *d*, *e* merupakan permutasi dari 5 huruf diambil 1 huruf.

Contoh 1

Misalkan diberikan 7 huruf, yaitu A, B, C, D, E, F, dan G. Berapakah banyaknya susunan tiga huruf yang diambil dari tujuh huruf tersebut ?

Jawab:

Huruf pertama dapat dipilih satu dari 7 huruf, jadi ada 7 pilihan untuk posisi pertama.
Huruf kedua dapat dipilih salah satu dari 6 huruf yang tersisa, jadi ada 6 pilihan.
Huruf ketiga dapat dipilih salah satu dari 5 huruf yang belum terpilih, jadi ada 5 pilihan.
Berdasarkan aturan perkalian membilang, susunan 3 huruf yang diambil dari 7 huruf, banyaknya adalah 7 x 6 x 5 = 210.
Jadi $P(7, 3) = 210$.

Penurunan rumus P(n, r)

Kita mempunyai r posisi yang akan ditempati n objek
Posisi pertama mempunyai n pilihan
Posisi kedua mempunyai $n-1$ pilihan
Posisi ketiga mempunyai $n-2$ pilihan
Posisi keempat mempunyai $n - 3$ pilihan
dst.
Posisi ke-r mempunyai $n - (r - 1) = n - r + 1$ pilihan
Dengan demikian

$$P(n,r) = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-r+1)$$

Notasi Faktorial

Karena perkalian bebentuk $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$ sering digunakan dalam hitung peluang, maka perkalian tersebut lazim dilambangkan $n!$ dibaca 'n faktorial'. Pendefinisian tentang n faktorial adalah sebagai berikut.

Definisi Faktorial

Jika n adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1, maka yang disebut $n!$ adalah perkalian bilangan asli berturut-turut dari 1 sampai dengan n. Dalam kondisi khusus, didefinisikan 0! = 1 dan 1! = 1.

Selanjutnya

$2! = 1 \times 2 = 2$

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

dan seterusnya.

Apabila n > 3, maka

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$

$(n-1)! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1)$

Untuk penyederhanaan notasi, biasa dibuat hubungan n ! = n × (n–1) !

Kita kembali lagi pada rumus $P(n,r)$.

$$P(n,r) = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \ldots \times (n-(r-1))$$

$$P(n,r) = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-(r-1)) \times (n-r) \times (n-r-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times (n-r-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Akibat: $P(n,n) = n!$

Harap diperhatikan bahwa permutasi dan banyaknya permutasi adalah berbeda.

abc merupakan salah satu permutasi 3 huruf dari 5 huruf *a, b, c, d, e*.

P(5,3) menyatakan banyaknya permutasi, bukan menyatakan permutasi.

Permutasi dengan Pengulangan

Sering dijumpai permutasi dari objek-objek dengan beberapa diantaranya adalah sama. Misalnya kita ingin mencari permutasi 4 huruf dari huruf-huruf pada kata MATA. Apabila kita langsung menghitung banyaknya permutasi berdasarkan rumus sebelumnya akan diperoleh banyaknya permutasi adalah *P*(4, 4) = 4! = 24. Namun bila kita mendaftarnya akan diperoleh:

MATA, AMAT, TAMA, ATAM, MAAT, TAAM, AATM, AAMT,
TMAA, MTAA, ATMA, AMTA

Ternyata kita hanya mendapatkan 12 permutasi saja. Kenapa demikian?

Hal ini tejadi karena huruf A-nya kembar. Apabila kita beri indeks huruf A menjadi A_1 dan A_2, maka dengan membolak-balik posisi A_1 dan A_2 pada permutasi (contohnya MA_1TA_2, MA_2TA_1, A_1MA_2T, A_2MA_1T dan seterusnya) yang didapat diatas barulah didapatkan 24. Dengan demikian apabila ada huruf kembar sebanyak *k* maka permutasi yang diperoleh perlu dibagi *k*! akibat permutasi-permutasi huruf yang kembar tadi. Selanjutnya kita dapatkan rumus permutasi dengan pengulangan sebagai berikut.

Permutasi dengan Pengulangan

$$P(n,(k_1,k_2,...,k_r)) = \frac{n!}{k_1!.k_2!....k_r!}$$

dengan k_i banyaknya huruf yang kembar

<u>*Contoh 2*</u>

Berapakah banyaknya permutasi huruf dari kata ”MATEMATIKA”

Jawab:

Banyaknya seluruh huruf (n) = 10
Selanjutnya diidentifikasi banyaknya huruf-huruf kembar:
Banyaknya huruf M (k_1) = 2,
Banyaknya huruf A (k_2) = 3,
Banyaknya huruf T (k_3) = 2.
Jadi banyaknya permutasi huruf-huruf pada kata ”MATEMATIKA” adalah $\frac{10!}{2!.3!.2!}$

Permutasi Siklis

Permutasi siklis adalah permutasi yang cara menyusunnya melingkar. Permutasi melingkar hanya mempertimbangkan perbedaan posisi relatif suatu objek atau benda yang berada disamping kiri atau kanannya. Secara formal, permutasi melingkar adalah susunan melingkar yang dapat dibuat dari sekumpulan objek yang diambil seluruhnya atau sebahagiannya.

Sebagai ilustrasi, jika *n* orang ingin ditempatkan secara melingkar maka banyaknya susunan yang berbeda yang mungkin dapat diperoleh adalah sebagai berikut: karena susunan ini memperhatikan posisi relatif seseorang terhadap yang lainnya, maka kita tempatkan terlebih dahulu satu orang pada posisi tertentu, kemudian baru dilanjutkan dengan mempermutasikan (n–1) orang lainya.

Permutasi Siklis

Banyaknya permutasi melingkar dari *n* objek yang berbeda adalah

$$\frac{P(n,n)}{n} = (n-1)!$$

Contoh 3

Dalam suatu kegiatan internasional, terdapat orang Amerika, orang Perancis, orang Jerman, dan orang Italia. Mereka diposisikan duduk melingkar dengan syarat warga negara yang sama harus duduk berdampingan. Tentukan banyak cara mengatur susunan duduk mereka.

Jawab:

Posisi duduk mereka melingkar membentuk lingkaran sehingga penyusunannya menggunakan prinsip Permutasi Siklis. Masing-masing warga negara yang sama harus duduk berdampingan. Karena itu, kita misalkan 2 orang Amerika sebagai satu objek, 4 orang Perancis sebagai satu objek, 4 orang Jerman sebagai satu objek, dan 2 orang Italia sebagai satu objek sehingga totalnya ada 4 objek. Banyak cara mengatur 4 objek ini berlandaskan prinsip permutasi siklis adalah sebagai berikut.

$$(4-1)! = 3!$$

Untuk mengatur posisi duduk 2 orang Amerika, gunakan prinsip permutasi biasa: 2! Maka dengan cara yang sama, banyak cara mengatur posisi duduk 4 orang Perancis, 4 orang Jerman, dan 2 orang Italia berturut-turut adalah 4!, 4!, dan 2!. Jadi, banyak cara mengatur susunan duduk mereka semua adalah sebagai berikut.

$$3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2! = 6 \cdot 2 \cdot 24 \cdot 24 \cdot 2 = 13.824.$$

Soal Latihan

1. Tentukan n jika diketahui:
   a. P(n, 5) = 10 P(n, 4)
   b. P(n–1, 2) = 20
   c. P(n+1, 3) = P(n, 4)
   d. P(n, 2) = 63.
2. Tentukan nilai n yang memenuhi ${}_nP_2 = 72$.
3. Tersedia angka-angka 1, 2, 3, 4 akan dibentuk bilangan dengan empat angka tanpa memuat angka yang sama. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk?
4. Dari 7 siswa akan dipilih 4 siswa untuk menjadi pengurus kelas, yaitu ketua,wakil ketua, sekretaris, dan bendahara. Berapa banyak susunan pengurus apabila setiap calon pengurus mempunyai kemungkinan yang sama untuk dipilih dan tidak ada pengurus yang rangkap?
5. Berapa banyak bilangan yang terdiri dari 6 angka yang dapat dibentuk dari angka-angka berikut?
   a. 223456
   b. 123123
   c. 122785
   d. 555666
6. Terdapat 7 siswa sedang belajar di taman membentuk sebuah lingkaran. Ada berapa cara mereka duduk dengan membentuk sebuah lingkaran?
7. Diketahui 4 baju dan 5 celana panjang berbeda. Tentukan banyaknya cara memakai baju dan celana tersebut.

8. Ada 6 jalan yang menghubungkan kota *A* dan kota *B*, dan ada 4 jalan yang menghubungkan kota *B* dan kota *C*. Berapakah banyaknya cara yang bisa ditempuh melakukan perjalanan
   a. Dari kota *A* ke kota *C* melalui kota *B*
   b. Dari kota *A* ke kota *C* melalui kota *B*, kembali lagi ke kota *A* (pulang pergi).
   c. Dari kota *A* ke kota *C* melalui kota *B*, pulang pergi tanpa melalui jalan yang sama saat berangkat.
9. Diketahui 7 orang pemain bola volley. Tentukan banyaknya kemungkinan susunan 3 pemain untuk kapten, pengumpan dan smasher jika dianggap semua pemain mempunyai kemampuan yang sama.
10. Misalkan ada 3 orang calon utusan dari kelas I, 4 orang dari kelas II dan 2 orang dari kelas III. Akan dipilih utusan sekolah terdiri 2 orang yang tidak berasal dari kelas yang sama, berapakah banyaknya kemungkinan mengirimkan sepasang utusan tersebut ?
11. Diketahui 6 kartu yang masing-masing bertuliskan huruf *k, e, r, t, a, s*. Berapakah banyaknya susunan huruf terdiri dari 2 huruf yang dapat anda buat.
12. Sama dengan no 4, untuk huruf-huruf *p, a, p, e, r*
13. Diketahui bilangan 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, dan 9.
   a. Tentukan banyaknya bilangan 3-angka berbeda yang dapat dibuat dari angka-angka tersebut dengan syarat bilangannya lebih dari 200
   b. Tentukan banyaknya bilangan 3-angka berbeda yang dapat dibuat dari angka-angka tersebut dengan syarat bilangannya genap

c. Tentukan banyaknya bilangan 3-angka berbeda yang dapat dibuat dari angka-angka tersebut dengan syarat bilangannya lebih dari 200 dan genap
d. Tentukan banyaknya bilangan 3-angka yang dapat dibuat dari angka-angka tersebut dengan syarat bilangannya lebih dari 200
e. Tentukan banyaknya bilangan 3-angka yang dapat dibuat dari angka-angka tersebut dengan syarat bilangannya genap
f. Tentukan banyaknya bilangan 3-angka yang dapat dibuat dari angka-angka tersebut dengan syarat bilangannya lebih dari 200 dan genap

14. Berapakah banyaknya tanda berbeda yang dapat dibuat dari 8 bendera yang tergantung secara vertikal apabila disediakan 4 bendera merah, 2 bendera biru dan 2 bendera hijau.
15. Empat orang laki-laki dan empat orang perempuan duduk dalam satu bangku yang panjang. Tentukan banyaknya cara mereka duduk apabila
    a. Laki-laki dan perempuan duduknya berselang seling
    b. Laki-laki dan perempuan duduknya berselang seling, dan ada satu perempuan harus berdampingan dengan perempuan lainnya
    c. Laki-laki dan perempuan duduknya berselang seling, dan ada satu perempuan dan satu laki-laki yang duduknya tak boleh berdampingan.
16. Dari kata *ELEVEN* dilakukan permutasi terhadap huruf-hurufnya.
    a. Berapakah banyaknya permutasinya ?
    b. Berapakah banyaknya susunan yang diawali dan diakhiri dengan huruf *E*

c. Berapakah banyaknya susunan yang memiliki tiga huruf *E* berdampingan ?

d. Berapakah banyaknya susunan yang diawali huruf *E* dan diakhiri huruf *N* ?

17. Misalkan ada 15 balok, yang terdiri atas 6 balok putih, 4 balok merah, 3 balok biru dan 2 balok hitam akan disusun membentuk suatu lingkaran. Jika balok sewarna dibedakan tetapi harus dikelompokkan, maka berapakah banyaknya susunan yang dapat dibentuk?

18. Dalam kedokteran dikenal 8 golongan darah , yaitu : *AB*+, *AB*-, *A*+, *A*-, *B*+,*B*-, *O*+, *O*- . Selain itu tekanan darah dikelompokkan atas : rendah, normal dan tinggi. Berdasarkan kedua hal tersebut, ada berapa cara seorang pasien dapat dikelompokkan?

19. Empat pasang suami-istri membeli 8 tiket yang sebaris untuk suatu pertunjukkan konser musik. Berapa banyak susunan duduk mereka, jika

    a. tidak ada pembatasan apa-apa

    b. setiap pasangan suami istri harus duduk berdampingan

    c. kelompok suami duduk disebelah kanan kelompok istri

20. Dari 4 apel merah, 5 hijau dan 6 kuning, berapa banyak kemungkinan pilihan yang terdiri atas 9 apel, jika setiap warna harus diambil 3 ?

21. Tiga pasang suami-istri akan duduk dalam satu baris kursi yang terdiri 7 kursi kosong. Berapa banyak susunan duduk mereka, jika

    a. tidak ada pembatasan apa-apa

    b. setiap pasangan suami istri harus duduk berdampingan

c. setiap pasangan suami istri harus duduk berdampingan dan tidak ada laki-laki bersebelahan dengan wanita yang bukan istrinya.
d. kelompok suami duduk disebelah kanan kelompok istri

22. Diketahui himpunan A = {p, q, r, s}. Berapa banyak susunan dua huruf dari huruf-huruf pada himpunan A dimana huruf tidak bisa berulang.
23. Suatu wahana permainan mempunyai 5 pintu masuk, 3 orang hendak memasuki wahana tersebut. Ada berapa cara mereka dapat masuk dengan pintu yang berlainan.
24. Terdapat 5 orang laki-laki dan 5 orang perempuan duduk mengelilingi meja bundar, berapa banyak susunan tempat duduk yang mungkin jika setiap orang perempuan duduk di antara dua orang laki-laki.
25. Kode pos terdiri dari 5 angka. Berapa banyak kode pos berbeda yang dapat dibuat dengan angka 0-9 jika tidak ada digit yang digunakan lebih dari satu kali dan digit pertama bukan 0.
26. Berapa banyaknya kata berbeda yang dapat dibentuk dengan huruf dari kata 'REMAINS' sedemikian rupa sehingga huruf vokal selalu muncul di tempat ganjil.
27. Sebuah keluarga terdiri dari ayah, ibu dan tiga anaknya akan berfoto bersama. Jika mereka duduk berderet satu baris, maka tentukan banyaknya susunan duduk mereka.
28. Pada suatu ruangan terdapat 10 ubin yang disusun dalam satu baris. Kesepuluh ubin itu terdiri atas 5 ubin merah, 3 ubin biru dan 2 ubin putih. Tentukan berapa cara dapat disusun kesepuluh ubin tersebut.
29. Suatu organisasi terdiri dari 12 orang, dimana diantaranya ada seorang ketua dan seorang wakil ketua. Jika mereka duduk

mengelilingi meja bundar, dimana ketua dan wakil ketua harus duduk berdampingan, berapa banyak cara mereka duduk.

30. Sekelompok siswa yang terdiri dari 4 orang siswa kelas X dan 5 orang siswa kelas XI akan berdiri satu baris menerima hadiah dari kepala sekolah. Tentukan banyaknya formasi barisan yang dapat dibentuk jika siswa satu kelas tidak boleh terpisah.

BAB 2
KOMBINASI

KEMAMPUAN AKHIR

Mahasiswa dapat menentukan kombinasi dan partisi dari sekumpulan objek

CAPAIAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat membedakan suatu kasus termasuk permutasi atau kombinasi
2. Mahasiswa dapat menurunkan rumus kombinasi *k* objek dan *n* objek yang diberikan
3. Mahasiswa dapat menentukan banyaknya kombinasi untuk kejadian tunggal maupun majemuk
4. Mahasiswa dapat menentukan partisi silang suatu himpunan
5. Mahasiswa dapat menghitung banyaknya partisi terurut dan tidak terurut dari suatu himpunan kedalam beberapa subhimpunan.
6. Mahasiswa dapat menerapkan teorema terkait kombinasi untuk menyelesaikan masalah.

PENYAJIAN

Dalam bab ini dikaji mengenai kombinasi, hubungan dan perbedaannya dengan permutasi. Penyajian dilakukan melalui ilustrasi-ilustrasi untuk memudahkan pemahaman mahasiswa mengenai fenomena kombinatorika yang sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari. Setelah dirumuskan kombinasi untuk *k* objek dari *n* objek yang diberikan, dikaji pula secara khusus mengenai partisi, partisi silang dan partisi terurut dari suatu himpunan.

URAIAN MATERI

Kombinasi

Kombinasi r objek dari n objek adalah setiap pemilihan r objek dari n objek yang diberikan tanpa memperhatikan urutan dari objek-objek yang terpilih. Dengan kata lain, suatu kombinasi r unsur dari suatu himpunan n unsur adalah suatu himpunan bagian yang terdiri dari r unsur. Notasi untuk kombinasi r unsur dari n unsur adalah $C(n, r)$, atau nCr, atau C_r^n. Untuk menghitung suatu kombinasi perhatikan ilustrasi berikut ini.

Ilustrasi 1.
Misalkan diberikan himpunan $H = \{ a, b, c, d \}$. Tentukan banyaknya kombinasi dan permutasi 3 unsur dari unsur-unsur di H.

Jawab:
Hasil kombinasi dan permutasi 3 unsur dari unsur-unsur H adalah sebagai berikut:

Kombinasi	**Permutasi**
abc	*abc, acb, bac, bca, cab, cba*
abd	*abd, adb, bad, bda, dab, dba*
acd	*acd, adc, cad, cda, dac, dca*
bcd	*bcd, bdc, cbd, cdb, dbc, dcb*
4 kombinasi	24 permutasi

Dari ilustrasi di atas terlihat bahwa setiap kombinasi mempunyai permutasi yang banyaknya sama. Dalam ilustrasi tersebut banyaknya kombinasi dikalikan 6 sama dengan permutasi. Bilangan pengali 6 merupakan banyaknya permutasi 3 unsur.

Dengan demikian dapat ditarik kesimpulan bahwa banyaknya kombinasi r unsur dari n unsur dikalikan permutasi r unsur sama dengan permutasi r unsur dari n unsur, yaitu

$\boldsymbol{C(n, r) \,.\, P(r, r) = P(n, r)}$.

$$C(n, r)\,.\,r\,! = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!.(n-r)!}$$

Lebih jelas dituliskan dalam teorema berikut.

<u>Teorema</u>

Misalkan n dan k bilangan bulat positif dengan $n \geq r$. Banyaknya kombinasi dari n objek yang diambil r objek adalah

$$\binom{n}{r} = \frac{n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

Bentuk umum $\binom{n}{r}$ dapat juga dituliskan dalam bentuk nC_r atau $C(n,r)$

Bukti:

Terdapat $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ cara untuk memilih r objek secara berurutan.

Sedangkan terdapat $r!$ cara untuk memilih kombinasi dari r-objek yang sama.

Jadi setiap kombinasi dihitung $r!$ kali dalam $P(n,r)$. Oleh karena itu terdapat $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ kombinasi yang terbentuk.

<u>*Contoh 1.*</u>

Berapakah banyaknya cara memilih 3 orang pengurus dari 8 kandidat pengurus ?

Jawab:

$C(8, 3) = \frac{8!}{3!.5!} = \frac{8.7.6.5!}{3!.5!} = \frac{8.7.6}{3.2.1} = 8.7 = 56$ cara

Jadi, banyaknya cara memilih 3 orang pengurus dari 8 kandidat pengurus adalah 56 cara.

<u>*Contoh 2.*</u>

Seorang petani membeli 3 sapi, 2 kambing, dan 4 ayam dari seseorang yang memiliki 6 sapi, 5 kambing, 8 ayam. Berapakah banyaknya cara petani tersebut memilih ?

Jawab:

Banyaknya cara memilih sapi = $C(6, 3) = 20$

Banyaknya cara memilih kambing = $C(5, 2) = 10$

Banyaknya cara memilih ayam = $C(8, 4) = 70$

Banyaknya cara memilih ketiganya = 20. 10. 70 = 14.000 cara

<u>*Contoh 3*</u>

Dalam suatu pemilihan, akan dipilih 4 orang sebagai panitia 17 Agustus dari 10 orang kandidat.

a. Berapakah banyaknya cara panitia tersebut dapat dipilih.

b. Berapakah banyaknya cara panitia tersebut dapat dipilih jika salah seorang kandidat tertentu harus menjadi panitia.

c. Berapakah banyaknya cara panitia tersebut dapat dipilih jika salah seorang kandidat tertentu tidak boleh menjadi panitia.

Jawab:

a. Banyaknya cara memilih 4 orang dari 10 orang yang ada sebagai panitia yaitu

$$10C_4 = \frac{10!}{6!\,.\,4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

Jadi, banyaknya cara panitia tersebut dapat dipilih adalah 210 cara

b. Banyaknya cara panitia tersebut dapat dipilih jika salah seorang kandidat tertentu harus menjadi panitia sama dengan memilih 3 orang dari 9 orang kandidat (karena 1 orang kandidat tertentu sudah terpilih) yaitu

$$9C_3 = \frac{9!}{6!\,.\,3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

Jadi, banyaknya cara panitia tersebut dapat dipilih jika salah seorang kandidat tertentu harus menjadi paniti adalah 84 cara

c. Banyaknya cara panitia tersebut dapat dipilih jika salah seorang kandidat tertentu tidak boleh menjadi panitia sama dengan memilih 4 orang dari 9 orang kandidat (karena 1 orang kandidat tertentu tidak boleh terpilih) yaitu

$$9C_4 = \frac{9!}{5!\,.\,4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

Jadi, banyaknya cara panitia tersebut dapat dipilih jika salah seorang kandidat tertentu tidak boleh menjadi panitia adalah 126 cara

<u>Contoh 4.</u>

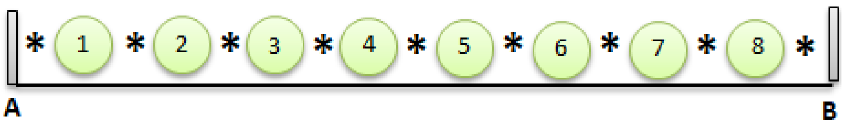
Terdapat 12 stasiun perantara yang menghubungkan tempat A dan B. Tentukan banyak cara yang dapat digunakan kereta untuk berhenti di 4 stasiun perantara sehingga tidak ada dua stasiun pemberhentian yang berurutan yang dilalui kereta tersebut.

Jawab:

Jumlah stasiun pemberhentian adalah 4

Jumlah stasiun yang tidak digunakan untuk berhenti $= 12 - 4 = 8$

Kita ilustrasikan sebagai berikut.



Gambar 2.1 Ilustrasi Stasiun Perantara

Dimana  adalah stasiun yang tidak digunakan untuk berhenti. Agar tidak ada dua stasiun pemberhentian yang berurutan, maka stasiun tempat pemberhentian haruslah berada pada tanda *.

Sekarang ada 9 posisi (ditandai dengan * pada gambar 2.1) untuk menempatkan 4 stasiun pemberhentian sehingga tidak ada dua stasiun pemberhentian yang berurutan.

Banyak cara yang dapat digunakan $= C(9,4) = \frac{9!}{5!\times 4!} = \frac{9\times 8\times 7\times 6}{4\times 3\times 2\times 1} = 126$

Jadi, banyak cara yang dapat digunakan kereta untuk berhenti di 4 stasiun perantara sehingga tidak ada dua stasiun pemberhentian yang berurutan adalah 126 cara.

Partisi Silang

Partisi suatu himpunan X adalah pembagian X menjadi himpunan-himpunan bagian saling lepas dengan gabungannya berupa X itu sediri. Dengan kata lain, setiap $a \in X$ akan terkandung dalam satu dan hanya satu himpunan bagian dari X. Ini mengatakan bahwa koleksi $\{ A_1, A_2, \ldots, A_m \}$ dari himpunan–himpunan bagian X merupakan partisi X, jika dan hanya jika

(1) $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$

(2) Untuk sembarang A_i, A_j hanya berlaku $A_i = A_j$ atau $A_i \cap A_j = \emptyset$, tetapi tidak keduanya.

Himpunan bagian pada sebuah partisi disebut sel.

Contoh 5.

Misalkan $X = \{ 1, 2, 3, \ldots, 9 \}$. Apakah kelas-kelas himpunan berikut merupakan partisi dari X

(a) $\{ \{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\} \}$
(b) $\{ \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{5, 7, 9\} \}$
(c) $\{ \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6, 8\}, \{7, 9\} \}$

Jawab:

(a) bukan partisi karena $7 \in X$, tapi 7 tidak menjadi anggota sel manapun
(b) bukan partisi karena 5 terkandung dalam lebih dari satu sel
(c) partisi dari X karena setiap unsur X terkadung tepat dalam satu sel

Misalkan { $A_1, A_2, ..., A_r$ } dan { $B_1, B_2, ..., B_s$ } keduanya merupakan partisi dari himpunan yang sama *X*. Kelas irisan { $A_i \cap B_j$ } membentuk partisi baru dari *X*, partisi semacam ini disebut **partisi silang**.

Contoh 6.

Misalkan {*A*, *B*, *C*} adalah partisi mahasiswa baru FKIP, masing-masing adalah mahasiswa yang lulus jalur SNMPTN, SBMPTN dan Tes Mandiri. Misalkan {*L*, *P*} adalah partisi mahasiswa yang sama berdasarkan jenis kelamin laki-laki dan perempuan. Tentukan partisi silang yang mungkin terjadi ?

Jawab:

$A \cap L$: mahasiswa lulus jalur PBUP berjenis kelamin laki-laki

$B \cap L$: mahasiswa lulus jalur SPMB berjenis kelamin laki-laki

$C \cap L$: mahasiswa lulus jalur Tes Mandiri berjenis kelamin laki-laki

$A \cap P$: mahasiswa lulus jalur PBUP berjenis kelamin perempuan

$B \cap P$: mahasiswa lulus jalur SPMB berjenis kelamin perempuan

$C \cap P$: mahasiswa lulus jalur Tes Mandiri berjenis kelamin perempuan

Partisi Terurut

Untuk memahami masalah partisi terurut, perhatikanlah ilustrasi berikut ini.

Ilustrasi 2.

Misalkan kotak *A* berisi tujuh bola pingpong yang diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7. Selanjutnya dari kotak tersebut diambil tanpa pengembalian 2 bola, kemudian 3 bola dan terakhir 2 bola. Berapakah banyaknya cara pengambilan bola semacam ini ?

Masalah ini adalah masalah menghitung banyaknya partisi terurut $\{A_1, A_2, A_3\}$ dengan masing-masing memuat 2 bola, 3 bola dan 2 bola.

Banyaknya cara mengambil 2 bola pertama adalah $C(7,2)$,
Banyaknya cara mengambil 3 bola kedua adalah $C(5,3)$, dan
Banyaknya cara mengambil 2 bola terakhir adalah $C(2,2)$.
Oleh karenanya, banyaknya cara mengambil bola-bola tersebut adalah perkalian dari ketiganya, yaitu $C(7,2) \,.\, C(5.3).\, C(2,2) = 21.\ 10.\ 1 = 210$

Teorema Partisi Terurut

Misalkan A memuat n unsur dan $n_1, n_2, \ldots., n_r$ bilangan asli dan $n_1+ n_2+ \ldots.+ n_r = n$, maka banyaknya partisi terurut $\{ A_1, A_2, \ldots, A_r \}$ yang masing-masing beranggotakan n_1 unsur, n_2 unsur, ..., n_r unsur adalah

$$C(n, n_1).\, C(n-n_1, n_2).\, C(n-n_1-n_2, n_3).\, \ldots\, C(n-n_1-n_2-n_3-\ldots-n_{r-1}, n_r)$$

Buktikan nilai ini sama dengan $\dfrac{n!}{n_1!.n_2!\ldots n_r!}$.

Pada ilustrasi 2 di atas, banyaknya cara mengambil bola tanpa pengembalian dari 7 bola diambil pertama 2 bola, dilanjutkan 3 bola dan terakhir 2 bola dapat juga dikerjakan dengan cara $\frac{7!}{2!.3!.2!} = \frac{7.6.5.4}{2.2} = 7.6.5 = 210$ cara

Partisi Tidak Terurut

Partisi tidak terurut dari himpunan berhingga A didefinisikan sebagai kumpulan $\{A_1, A_2, \dots, A_r\}$ dimana $A_1, A_2, \dots, A_r$ adalah himpunan bagian dari A yang saling lepas. Sedangkan partisi terurut dari himpunan A terjadi jika urutan $A_1, A_2, \dots, A_r$ diperhatikan. Untuk lebih memaham perbedaan keduanya, perhatikan contoh 7 berikut.

Contoh 7.

Berapa banyak cara 12 mahasiswa dibagi kedalam tiga kelompok belajar yang masing-masing kelompok terdiri atas 4 mahasiswa jika:

1. Satu kelompok belajar bahasa indonesia, satu kelompok belajar matematika dan satu kelompok belajar bahasa inggris.
2. Semua kelompok belajar matematika.

Jawab:

1. Karena masing-masing kelompok mempelajari subjek yang berbeda, maka untuk menyelesaikan masalah tersebut dapat dilakukan dengan mencari banyaknya partisi terurut dari 12 mahasiswa yang dibagi ke dalam kelompok-kelompok $\{K_1, K_2, K_3\}$ yang masing-masing terdiri dari 4 mahasiswa. Sehingga ada

   $$\frac{12!}{4!\,.\,4!\,.\,4!} = 34.650\ cara$$

   Jadi, banyak cara membagi 12 mahasiswa ke dalam tiga kelompok belajar bahasa indonesia, matematika dan bahasa inggris adalah 34.650 cara.

2. Jika semua kelompok mempelajari subjek yang sama berarti urutan tidak dipersoalkan. Hal ini sama saja dengan mencari banyaknya cara menyusun partisi-partisi tidak terurut.

   Permasalahan (1) merupakan permasalahan menyusun partisi-partisi terurut yang mana masing-masing partisi $\{K_1, K_2, K_3\}$ dapat disusun dalam 3! cara. Untuk menyelesaikan permasalahan (2), banyaknya cara pada permasalahan (1) harus dibagi banyaknya cara menyusun masing-masing partisi $\{K_1, K_2, K_3\}$. Sehingga ada

$$\frac{12!}{4!\,.\,4!\,.\,4!} \times \frac{1}{3!} = 5.775$$

   partisi-partisi tidak terurut.

   Jadi, banyak cara membagi 12 mahasiswa ke dalam tiga kelompok yang belajar matematika adalah 5.775 cara.

Soal Latihan

1. Dalam pertemuan yang dihadiri 10 pasang suami istri, mereka saling berjabat tangan kecuali pada pasangannya. Berapakah banyaknya jabat tangan yang terjadi?
2. Jika 5P(n, 3) = 24 C(n, 4), berapa nilai n?
3. Dalam suatu kelas mempunyai 6 orang jago pidato. Suatu saat diadakan lomba pidato di sekolah dengan ketentuan setiap kelas dapat mengirimkan maksimal dua orang. Berapakah banyaknya cara kelas tersebut mengirimkan wakilnya untuk mengikuti lomba pidato?
4. Diketahui himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
   a. Berapakah banyaknya himpunan bagian dari A?
   b. Berapakah banyaknya himpunan bagian dari A yang terdiri dari tiga anggota?
5. Suatu kelompok remaja mempunyai 5 pelari pria dan 4 pelari wanita. Pada suatu saat kelompok tersebut mengikuti lomba lari beregu yang terdiri dari empat orang pelari
   a. Berapakah banyaknya kombinasi tim pelari yang dapat dibentuk
   b. Berapakah banyaknya kombinasi tim pelari yang dapat dibentuk apabila dalam tim tersebut diharuskan terdiri dari 2 pelari pria dan satu pelari wanita
   c. Berapakah banyaknya kombinasi tim pelari yang dapat dibentuk apabila dalam tim tersebut diharuskan terdiri dari minimal satu wanita
6. Dalam pelatihan bulutangkis terdapat 10 orang pemain putra dan 8 orang pemain putri. Berapakah pasangan ganda yang dapat diperoleh untuk:

a. ganda putra
b. ganda putri
c. ganda campuran

7. Buatlah tabel untuk menyelidiki banyaknya faktor dari suatu bilangan bulat. Tabel tersebut memuat kolom-kolom: bilangan, faktor, banyaknya faktor, faktorisasi prima, hasil kali tiap pangkat dari faktorisasi prima setelah masing-masing ditambah satu. Pada kolom bilangan, gunakanlah bilangan-bilangan berikut (a) 12 (b) 20 (c) 60 (d) 72
8. Tentukan banyaknya faktor dari 5040. (Gunakan hasil no. 7)
9. Sebuah kantong berisi 7 kelereng merah dan 5 kelereng kuning. Dari kantong itu diambil 3 kelereng sekaligus secara acak. Berapakah banyak cara terambil 2 kelereng merah dan 1 kelereng kuning?
10. Berapa banyaknya nomor telepon yang terdiri dari 7 angka dapat dibuat dengan 4 digit awalnya adalah 0812, tiga digit sisanya saling berbeda dan bukan merupakan bilangan-bilangan 0, 3, atau 5, serta digit terakhirnya bukan angka 9.
11. Sebuah kantong berisi 7 kelereng merah dan 5 kelereng kuning. Dari kantong itu diambil 3 kelereng sekaligus secara acak. Ada berapa cara pengambilan, jika kelereng yang diambil adalah:
    a. ketiganya berwarna merah,
    b. ketiganya berwarna kuning,
    c. kelereng berwarna merah dan 1 kelereng berwarna kuning?
12. Mira pergi mengunjungi perpustakaan untuk meminjam 3 buah buku. Ia memiliki ketertarikan terhadap 8 buku berbeda. Dari kedelapan buku tersebut, ia tidak akan meminjam buku Kalkulus II

kecuali jika buku Kalkulus I juga dipinjam. Dalam berapa cara Mira dapat memilih ketiga buku yang akan dipinjamnya?

13. Sebuah kelas mempunyai 9 siswa laki-laki dan 3 perempuan. Dalam kelas tersebut akan dibentuk panitia hari ulang tahun sekolah yang terdiri dari 4 orang. Berapakah banyaknya cara membentuk panitia tersebut apabila panitia tersebut
    a. Memuat paling sedikit seorang perempuan
    b. Memuat tepat seorang perempuan
14. Misalkan 10 titik A, B, C, ..., J terletak pada suatu bidang dan tidak ada 3 titik yang segaris. Dari titik-titik tersebut dibuat ruas garis-ruas garis.
    a. Berapakah banyaknya ruas garis yang terbentuk?
    b. Berapakah banyaknya ruas garis yang tidak melalui A dan B?
    c. Berapakah banyaknya segitiga yang terbentuk?
    d. Berapakah banyaknya segitiga yang memuat titik A?
    e. Berapakah banyaknya segitiga yang memuat ruas garis AB?
15. Berapakah banyaknya cara membagikan 9 mainan secara sama rata kepada 3 anak?
16. Berapakah banyaknya cara membagi 9 orang sama rata ke dalam tiga kelompok?
17. Berapakah banyaknya cara membagi 10 orang kedalam tiga kelompok, dimana satu kelompok memuat 4 orang, dan kelompok lainnya memuat 3 orang?
18. Berapakah banyaknya cara membagi/mempartisi 12 orang ke dalam tiga kelompok yang masing-masing beranggotakan 5, 4, dan 3 orang?

19. Himpunan Mahasiswa Program Studi (HMPS) Pendidikan Matematika mengadakan pertemuan untuk membahasa Lomba Matematika tingkat SMA yang akan mereka adakan. Setelah diskusi yang cukup panjang antara 23 orang anggota HMPS, mereka memutuskan untuk membagi menjadi 5 kelompok yang terdiri dari 3 orang dan 2 kelompok yang terdiri dari 4 orang untuk melanjutkan diskusi mereka. Tentukan banyak cara pembagian kelompok ini dapat dilakukan!
20. Ryu akan menempatkan 5 bola kedalam 3 kotak. Masing-masing kotak dapat memuat kelima bola tersebut. Tentukan dalam berapa cara Ryu dapat menempatkan bola sehingga tidak ada kotak yang kosong jika:
    a. Bola dan kotak semuanya berbeda
    b. Bola berbeda tetapi kotaknya identik
21. Di suatu tempat, ada sepuluh rumah yang tersusun berbaris. Pada malam tertentu, seorang pencuri berencana mencuri dari tiga rumah di daerah itu. Dalam berapa banyak cara pencuri tersebut dapat merencanakan sedemikian rupa sehingga tidak ada dua dari rumah targetnya tersebut yang bersebelahan?

BAB 3
PELUANG

KEMAMPUAN AKHIR

Mahasiswa dapat menentukan nilai peluang suatu kejadian.

CAPAIAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat menentukan ruang sampel
2. Mahasiswa dapat menentukan nilai peluang suatu kejadian tunggal
3. Mahasiswa dapat menentukan nilai peluang suatu kejadian majemuk
4. Mahasiswa dapat menggunakan sifat-sifat pada ruang probabilitas hingga untuk menyelesaikan masalah peluang kejadian majemuk

PENYAJIAN

Dalam bab ini akan dipelajari mengenai percobaan acak, ruang sampel, kejadian, peluang kejadian tunggal dan majemuk, meliputi kejadian komplementer, irisan, gabungan, saling lepas dan saling bebas. Pada akhir bab ini disajikan teorema fundamental yang berkaitan dengan ruang probabilitas hingga.

URAIAN MATERI

Percobaan Acak

Suatu tindakan yang dikerjakan seseorang selalu ada hasilnya, namun hasilnya ada yang bisa langsung dipastikan, dan ada juga yang hasilnya tidak dapat dipastikan. Contoh tindakan yang hasilnya bisa dipastikan misalkan orang yang menjemur baju basah di tempat yang mataharinya terik maka dapat dipastikan bahwa dalam beberapa saat bajunya akan kering. Contoh lain, misalkan seseorang makan dengan porsi yang banyak, maka dapat dipastikan bahwa orang tersebut akan kenyang. Contoh tindakan yang hasilnya tidak dapat dipastikan, misalnya orang yang mengikuti ujian seleksi penerimaan mahasiswa baru, maka hasilnya bisa lulus atau tidak lulus, ini tidak dapat dipastikan. Contoh lain, orang yang mengikuti perlombaan balap sepeda, maka hasilnya juga tidak dapat dipastikan apakah orang tersebut akan menjadi juara 1, juara 2, atau juara 3, bahkan mungkin orang tersebut tidak mendapat juara, ini tidak dapat dipastikan juga hasilnya. Tindakan atau proses yang hasilnya tidak dapat diketahui sebelum tindakan tersebut selesai disebut ***percobaan acak***, atau sering disingkat percobaan. Teori peluang merupakan teori tentang hukum-hukum penentuan tingkat kepastian munculnya hasil-hasil tertentu dari suatu percobaan acak.

Ruang Sampel dan Kejadian

Pada suatu percobaan acak dapat ditentukan semua hasil yang mungkin, meskipun hasil yang akan muncul tidak dapat dipastikan sebelumnya. Himpunan semua hasil yang mungkin muncul atau terjadi dari suatu percobaan acak disebut ***ruang sampel***. Jika percobaan acaknya adalah *mengikuti seleksi ujian masuk perguruan tinggi*, maka ruang sampelnya adalah {*lulus*, *tidak lulus*}. Jika percobaan acaknya adalah *pertandingan sepak bola*, maka ruang sampelnya adalah {*menang*, *kalah*, *seri*}. Jika percobaaan acaknya adalah *melambungkan satu dadu sekali*, maka ruang sampelnya adalah {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Pada percobaan acak melambungkan dadu sekali, hasil munculnya mata dadu lebih dari 4 adalah {5, 6}, ini salah satu contoh suatu ***kejadian***. Ruang sampel pada percobaan acak melambungkan satu dadu sekali, yaitu {1, 2, 3, 4, 5, 6} dilambangkan dengan huruf ***S***, sedangkan kejadian muncul mata dadu lebih dari 4, yaitu {5, 6} disebut *suatu kejadian pada S*.

Apabila suatu ruang sampel mempunyai sifat bahwa semua titik sampelnya mempunyai kesempatan yang sama untuk muncul atau terjadi, maka ruang sampel tersebut disebut *ruang sampel yang berpeluang sama*. Dengan demikian, apabila suatu ruang sampel *S* terdiri dari *n* titik sampel yang berpeluang sama, maka peluang setiap titik sampelnya adalah $\frac{1}{n}$. Akibatnya untuk sutau kejadian *E* yang terdiri dari *k* titik sampel, maka peluang kejadian tersebut $P(E) = \frac{k}{n}$. Contohnya, sebuah dadu disebut dadu yang setimbang apabila pada lemparan dadu tersebut peluang munculnya setiap sisi adalah sama, yaitu masing-masing $\frac{1}{6}$. Pada pelemparan dadu yang setimbang, ruang sampelnya merupakan ruang sampel berpeluang sama. Contoh lain misalkan pelemparan uang logam yang munculnya gambar atau angka berpeluang sama, yaitu masing-masing $\frac{1}{2}$, maka ruang sampelnya juga merupakan ruang sampel berpeluang sama.

Definisi

1. *Kejadian* adalah *himpunan bagian dari suatu ruang sampel*.
2. Setiap himpunan bagian dari ruang sampel S disebut *kejadian pada S*.
3. Setiap anggota dari ruang sampel disebut *titik sampel*.

Pada percobaan acak *melambungkan satu dadu sekali*, ruang sampel terdiri dari 6 titik sampel, yaitu {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Sedangkan kejadian *munculnya mata dadu lebih dari empat* terdiri dari 2 titik sampel, yaitu {5, 6}.

Himpunan semua kejadian yang mungkin muncul dalam suatu percobaan disebut ruang sampel, dan dinotasikan dengan S. Unsur dari S merupakan kejadian khusus, disebut titik sampel atau sampel. Suatu kejadian A adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel S. Notasi $n(S)$ digunakan untuk menyatakan banyaknya anggota dari ruang sampel S.

<u>Contoh 1</u>.

(1) Percobaan melempar satu mata uang logam,
ruang sampelnya $S = \{A, G\}$
$n(S) = 2$

(2) Percobaan melempar satu mata dadu,
ruang sampelnya $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$n(S) = 6$

(3) Percobaan melempar dua mata uang logam,
ruang sampelnya $S = \{AA, AG, GA, GG\}$

$n(S) = 4$

(4) Percobaan melempar tiga mata uang logam,

ruang sampelnya S = { *AAA, AAG, AGA, GAA, AGG, GAG, GGA, GGG* }

$n(S) = 8 = 2^3$

(5) Percobaan melempar empat mata uang logam,

ruang sampelnya S = { *AAAA, AAAG, AAGA, AGAA, AAGG, AGAG, AGGA, AGGG, GAAA, GAAG, GAGA, GGAA, GAGG, GGAG, GGGA, GGGG* }

$n(S) = 16 = 2^4$

(6) Percobaan melempar satu mata uang logam dan satu dadu,

ruang sampelnya S = { *A*1, A2, A3, A4, A5, A6, *G*1, G2, G3, G4, G5, G6 } = { (A, 1), (A,2), (A,3), (A, 4), (A, 5), (A, 6), (*G*, 1), (G, 2), (G,3), (G,4), (G,5), (G,6) }

$n(S) = 12 = 2 \times 6$

Contoh 2.

Pada percobaan pelemparan tiga uang logam, kejadian munculnya angka sebanyak dua kali adalah {*AAG*, *AGA*, *GAA*} sedangkan kejadian munculnya angka minimal satu kali adalah {*AGG*, *GAG*, *GGA*, *AAG*, *AGA*, *GAA*, *AAA*}

Pada percobaan pelemparan 1 dadu dan 1 uang logam, kejadian munculnya mata dadu genap dan angka adalah {2*A*, 4*A*, 6*A*} atau boleh ditulis {(2, *A*), (4, *A*), (6, *A*)}

Pada *percobaan* pelemparan 1 dadu dan 1 uang logam, kejadian munculnya mata dadu prima dan angka adalah {2*A*, 3*A*, 5*A*} atau boleh ditulis {(2, *A*), (3, *A*), (5, *A*)}

Peluang

Peluang atau probabilitas terkait dengan percobaan-percobaan yang bersifat acak, tak tentu, dan hasilnya tidak pasti. Ukuran derajat kepastian terjadinya suatu kejadian *K* disebut peluang terjadinya *K*, atau peluang bahwa *K* akan terjadi, atau peluang *K*, dan dinotasikan *P(K)*. Secara empiris, peluang merupakan nilai perbandingan tetap yang diperoleh apabila percobaan dilakukan berulang-ulang cukup banyak. Nilai perbandingan tetap ini dapat dituliskan dengan $f = \frac{s}{n}$ dimana *s* adalah banyaknya kejadian yang diamati dan *n* adalah banyaknya pelemparan. Perbandingan tetap ini disebut frekuensi relatif. Nilai limit dari frekuensi relatif ini selanjutnya disebut peluang suatu kejadian. Karena frekeunsi relatif selalu tak-negatif dan jumlah frekuensi relatif semua kejadian yang mungkin muncul sama dengan satu, maka penetapan peluang juga memenuhi kedua syarat tersebut.

Definisi

Misalkan ruang sampel *S* terdiri dari *n* titik sampel, yang semuanya mempuyai kesempatan yang sama untuk muncul atau terjadi. Misalkan *E* adalah kejadian pada *S* dan terdiri atas *k* titik sampel. Peluang *E*, atau peluang terjadinya *E* adalah bilangan $\frac{k}{n}$. Simbolnya adalah

$$P(E) = \frac{k}{n}$$

Secara praktis, *k* merupakan banyaknya cara kejadian *E* muncul, dan *n* adalah banyaknya seluruh kejadian yang mungkin muncul.

Peluang atau probabilitas suatu kejadian *E* dinyatakan dengan *P*(*E*), dan dihitung berdasarkan definisi di atas, $P(A) = \frac{n(E)}{n(S)}$, dimana *n*(*E*) adalah banyaknya kejadian *A* dan *n*(*S*) adalah banyaknya angota ruang sampel.

Sifat-sifat Peluang

1. Kejadian *E* merupakan himpunan bagian dari ruang sampel *S*. Akibatnya untuk setiap kejadian *E* berlaku hubungan $0 \leq n(E) \leq n(S)$ sehingga $0 \leq \frac{n(E)}{n(S)} \leq \frac{n(S)}{n(S)} = 1$. Dengan demikian diperoleh

   $0 \leq P(E) \leq 1$ untuk setiap kejadian *E*.

2. Ruang sampel *S* juga himpunan bagian ruang sampel *S* itu sendiri. Akibatnya ruang sampel *S* merupakan suatu kejadian dalam ruang sampel *S*. Dengan demikian diperoleh

   P(S) = 1 untuk setiap ruang sampel *S*.

3. Himpunan kosong (∅) juga merupakan himpunan dari ruang sampel *S*. Akibatnya himpunan kosong juga merupakan kejadian pada ruang sampel *S*. Dengan demikian diperoleh

   $$P(\emptyset) = 0$$

4. Apabila *P*(*E*) = 0, maka E disebut kejadian yang tidak mungkin terjadi, atau kejadian yang mustahil terjadi, atau suatu kemustahilan. Contohnya pada percobaan pelemparan dua buah dadu, kejadian munculnya mata dadu yang jumlah noktahnya 14 merupakan suatu kemustahilan karena jumlah noktah dari dua dadu yang muncul maksimal adalah 12.

5. Apabila $P(F) = 1$, maka F disebut kejadian yang pasti terjadi terjadi, atau kejadian pasti, atau suatu kepastian. Contohnya pada percobaan pelemparan dua buah dadu, kejadian munculnya mata dadu yang jumlahnya lebih dari 1 merupakan suatu kepastian karena jumlah noktah dari dua dadu yang muncul paling sedikit adalah 2, sehingga kejadian diinginkan jumlah mata dadu lebih dari 1 pasti terjadi.

Contoh 3.

Pada pelemparan satu dadu dan satu mata uang, berapakah peluang munculnya mata dadu prima dan angka?

Jawab :

Misalkan A adalah kejadian munculnya mata dadu prima dan angka pada mata uang

$S = \{1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 1G, 2G, 3G, 4G, 5G, 6G\}$ sehingga

$n(S) = 12$

A = $\{2A, 3A, 5A\}$ sehingga $n(A) = 3$

Jadi $P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Peluang Geometri

Pada pelemparan suatu benda, maka benda tersebut akan jatuh pada suatu tempat di suatu daerah tertentu. Himpunan titik-titik yang mungkin menjadi tempat jatuhnya benda tersebut merupakan ruang sampel dari percobaan menjatuhkan benda tersebut. Percobaan menjatuhkan benda dapat dianggap sebagai percobaan acak, yaitu tindakan memilih salah satu titik dari titik-titik pada suatu daerah.

Apabila setiap titik dalam ruang sampel berkesempatan sama untuk terpilih, maka dapat dikatakan bahwa percobaan tersebut adalah memilih satu titik pada suatu daerah secara acak.

1. Pelemparan benda yang jatuh pada suatu titik secara acak di suatu ruas garis S. Ruas garis S merupakan ruang sampel S, dan misalkan H adalah ruas garis (berada pada ruas garis S) himpunan bagian dari S, maka peluang bahwa benda jatuh di salah satu titik dari H adalah $\frac{\text{panjang } H}{\text{panjang } S}$ atau ditulis

$$\boxed{P(H) = \frac{Panjang\ H}{Panjang\ S}}$$

Contoh 4.

Perhatikan gambar berikut.

Misalkan sebuah titik X diambil secara acak. Tentukan peluang titik X tersebut berada pada ruas garis AC.

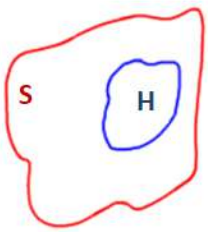
Jawab

Peluang titik X berada pada ruas garis AC $(P(X))$

$$P(X) = \frac{Panjang\ \overline{AC}}{Panjang\ \overline{AB}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Jadi, peluang titik X berada pada ruas garis AC adalah $\frac{1}{4}$

2. Pelemparan benda yang jatuh pada suatu titik secara acak pada suatu daerah S. Daerah S merupakan ruang sampel S dan H adalah derah yang merupakan himpunan bagian dari S, maka peluang bahwa benda

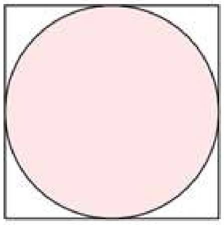


Gambar 3.1 Ilustrasi

tadi jatuh di salah satu titik dari H adalah $\frac{\text{luas } H}{\text{luas } S}$ atau ditulis

$$P(H) = \frac{Luas\ H}{Luas\ S}$$

<u>Contoh 5.</u>



Gambar 3.2

Sebuah titik dipilih secara acak dari kotak persegi seperti pada Gambar 2. Tentukan peluang titik tersebut berada di dalam lingkaran pink?

Jawab

Misalkan $2a$ adalah panjang sisi persegi.

Misalkan A adalah kejadian titik tersebut berada di dalam lingkaran pink.

Luas persegi $= (2a)^2 = 4a^2$

Luas lingkaran $= \pi a^2$

$$P(A) = \frac{Luas\ lingkaran}{Luas\ persegi} = \frac{\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{4}$$

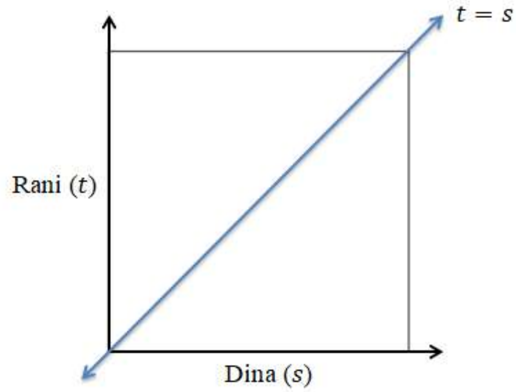
Jadi, peluang titik tersebut berada di dalam lingkaran pink adalah $\frac{\pi}{4}$

Penggunaan Peluang Geometri dalam Penyelesaian Masalah

<u>Contoh 6.</u>

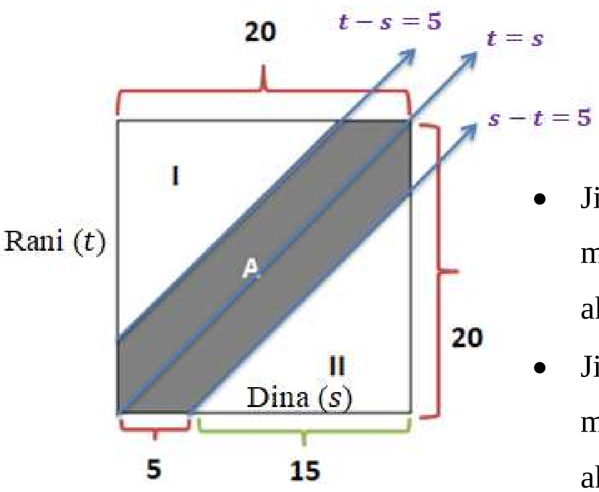
Dua orang bersahabat, Rani dan Dina, menaiki bus ke tempat kerja mereka dari terminal yang sama dan tiba di terminal dengan seragam secara acak antara pukul 07.00 dan 07.20 pagi. Mereka rela menunggu satu sama lain selama 5 menit, setelah itu mereka naik bus baik bersama atau sendiri. Berapa peluang mereka bertemu di terminal?

Jawab



Gambar 3.3

Dalam sistem koordinat Cartesian (s, t), kuadrat sisi 20 (menit) mewakili semua kemungkinan kedatangan pada pagi hari dari Rani dan Dina di terminal bus. Perhatikan gambar ilustrasi 3.3



Gambar 3.4

- Jika Rani tiba lebih dahulu, maka Rani (t) dan Dina (s) akan bertemu jika $t - s < 5$
- Jika Dina tiba lebih dahulu, maka Dina (s) dan Rani (t) akan bertemu jika $s - t < 5$

Daerah abu-abu A dibatasi oleh dua garis lurus, $t - s = 5$ dan $s - t = 5$. Oleh karena itu, kedua orang bersahabat tersebut akan bertemu hanya jika kedatangan mereka s dan t berada dalam wilayah A. Peluang terjadinya hal ini diberikan oleh rasio luas A dan luas persegi: $\frac{Luas\ Daerah\ A}{Luas\ Persegi}$

$$= \frac{Luas\ Persegi - (Luas\ Daerah\ 1 + Luas\ Daerah\ 2)}{Luas\ Persegi}$$

$$= \frac{400 - \left(\frac{15 \times 15}{2} + \frac{15 \times 15}{2}\right)}{400}$$

$$= \frac{175}{400} = \frac{7}{16}$$

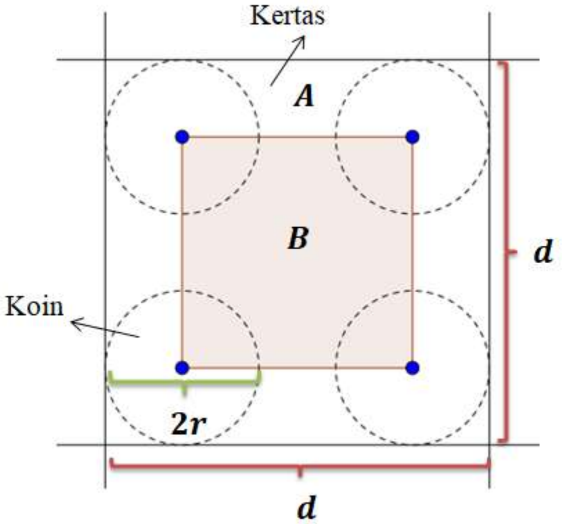
Jadi, peluang mereka bertemu di terminal adalah $\frac{7}{16}$

Contoh 7.

Sebuah koin jatuh di atas sebuah kertas berpetak. Ukuran kertas berpetak adalah d, jari-jari koin tersebut adalah r $(2r < d)$. Tentukan peluang koin jatuh berada di dalam kertas berpetak tersebut.

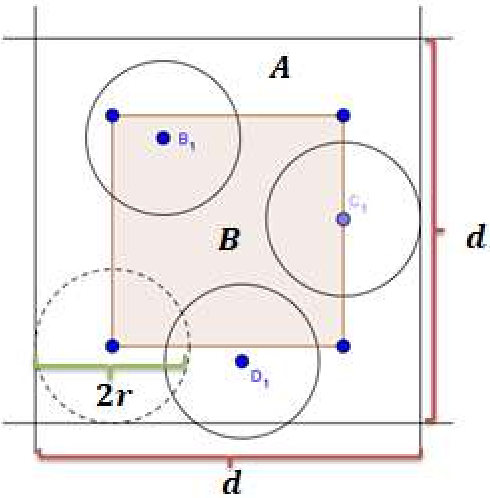
Jawab

Perhatikan ilustrasi gambar 3.5 berikut.



Gambar 3.5

Koin akan berada di dalam kertas berpetak jika jari-jari koin berada di daerah berwarna pink (Daerah A) seperti tampak pada Gambar 3.5 dan 3.6 (contoh lingkaran B_1 dan C_1). Sebaliknya, jika jari-jari koin berada di luar daerah pink (contoh lingkaran D_1), maka sebagian koin akan berada di luar kertas berpetak.



Gambar 3.6

Peluang koin jatuh berada di dalam kertas berpetak $\left(P(B)\right)$

$$P(B) = \frac{Luas\ Persegi\ B}{Luas\ Persegi\ A} = \frac{(d-2r)^2}{d^2}$$

Jadi, peluang agar koin jatuh berada di dalam kertas berpetak adalah $\frac{(d-2r)^2}{d^2}$

Kejadian Majemuk

Suatu kejadian dapat dipandang sebagai suatu himpunan. Oleh karenanya kita dapat mengkombinasikan kejadian-kejadian menjadi kejadian baru dengan menggunakan berbagai operasi himpunan.

1. Gabungan

$A \cup B$ adalah kejadian dimana A muncul atau B muncul (atau keduanya muncul).

Misalkan pada percobaan acak melemparkan sebuah dadu yang setimbang satu kali, ruang sampelnya adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Apabila $A = \{1, 3, 5\}$ dan $B = \{4, 5, 6\}$, maka dapat dikatakan bahwa A adalah kejadian munculnya mata dadu ganjil dan B adalah kejadian munculnya mata dadu lebih dari 3. Misalkan C adalah kejadian munculnya mata dadu ganjil atau mata dadu lebih dari 3, maka $C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$. Ini merupakan contoh gabungan dua kejadian, $C = A \cup B$. Jadi kejadian "A atau B" dapat dinyatakan sebagai kejadian $A \cup B$.

2. Irisan

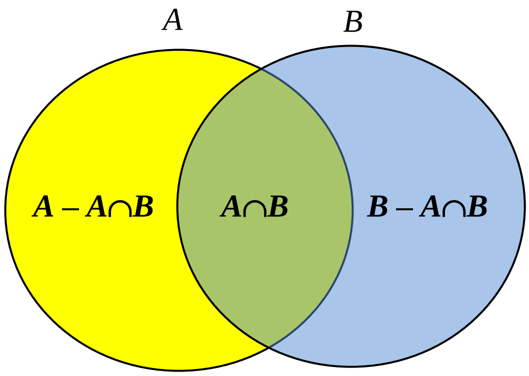
$A \cap B$ merupakan kejadian dimana A muncul dan B muncul (keduanya, bukan salah satu).

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Pada percobaan acak melemparkan sebuah dadu yang setimbang satu kali, ruang sampelnya adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Apabila $A = \{1, 3, 5\}$ dan $B = \{4, 5, 6\}$, maka dapat dikatakan bahwa A adalah kejadian munculnya mata dadu ganjil dan B adalah kejadian munculnya mata dadu lebih dari 3. Misalkan D adalah kejadian munculnya mata dadu ganjil dan mata dadu lebih dari 3, maka D = $\{3\}$. Ini merupakan contoh irisan dua kejadian, D = $A \cap B$. Jadi kejadian "A dan B" dapat dinyatakan sebagai kejadian $A \cap B$.

3. Peluang Kejadian Majemuk

Perhatikan diagram Venn berikut ini



$n(A \cup B) = [\ n(A) - n(A \cap B)\ ] + n(A \cap B) + [\ n(B) - n(A \cap B)\ ]$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

Karena ruang sampelnya sama maka dengan membagi kedua ruas dengan $n(S)$ diperoleh perhitungan peluang kejadian majemuk sebagai berikut.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

atau

$$P(A \text{ atau } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ dan } B).$$

Rumus perhitungan peluang kejadian majemuk ini dikenal dengan *rumus aditif* atau *rumus keterjumlahan* untuk peluang.

Berdasar rumus aditif untuk peluang dapat diperoleh rumus lain yang setara sebagai berikut.

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$$

atau

$$P(A \text{ dan } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ atau } B).$$

Rumus aditif ini dapat diperluas untuk tiga kejadian majemuk, rumus peluang tiga kejadian majemuk adalah sebagai berikut.

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Contoh 8.

Dalam suatu populasi mahasiswa FKIP Unram, dipilih seorang mahasiswa secara acak untuk mengikuti Seminar Nasional. Peluang mahasiswa menghadiri seminar adalah 0,1 dan peluang mahasiswa berasal dari Prodi Pendidikan Matematika adalah 0,02. Jika peluang mahasiswa menghadiri seminar dan berasal dari Prodi Pendidikan Matematika adalah 0,01 maka tentukan peluang seorang mahasiswa yang dipilih secara acak menghadiri seminar atau berasal dari Prodi Pendidikan Matematika.

Jawab:

Misalkan A adalah kejadian mahasiswa menghadiri seminar dan B adalah kejadian mahasiswa berasal dari Prodi Pendidikan Matematika, maka dapat dituliskan

$P(A) = 0{,}1 \,;\, P(B) = 0{,}02 \,;\, P(A \cap B) = 0{,}01$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0{,}1 + 0{,}02 - 0{,}01 = 0{,}11$$

Jadi, peluang seorang mahasiswa yang dipilih secara acak menghadiri seminar atau berasal dari Prodi Pendidikan Matematika adalah 0,11.

4. Peluang Kejadian Komplementer

Salah satu sifat penting dalam teori peluang adalah sifat dari peluang dua kejadian yang komplementer. Apabila A merupakan kejadian pada ruang sampel S, maka kejadian ”bukan A” atau ”tidak A” merupakan kejadian komplementer dari A, dinotasikan dengan A^c. Jadi A^c merupakan komplemen dari A, diartikan sebagai kejadian-kejadian dimana kejadian A tidak muncul.

$A^c = S - A$, demikian juga $A = S - A^c$ sehingga diperoleh

$n(A^c) = 1 - n(A)$ atau $n(A) = 1 - n(A^c)$

Karena pada ruang sampel yang sama, maka dengan membagi kedua ruas dengan $n(S)$ diperoleh rumus peluang untuk dua kejadian yang saling komplementer.

$$\boxed{P(A^c) = 1 - P(A) \text{ atau } P(A) = 1 - P(A^c)}$$

atau

$P(\text{bukan } A) = 1 - P(A)$

<u>Contoh 9</u>.

Pada percobaan pelemparan 5 mata uang logam secara bersamaan, berapakah peluang munculnya minimal satu angka?

Jawab :

$n(S) = 2^5 = 32$

A = kejadian munculnya minimal 1 angka

A^c = kejadian tidak muncul angka

= kejadian munculnya semua gambar

= $\{GGGGG\}$

$P(A^c) = \frac{1}{32}$

$$P(A) = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

Jadi peluang munculnya minimal satu angka adalah $\frac{31}{32}$

Permasalahan pada contoh 9 juga bisa diselesaikan langsung, tanpa menggunakan komplementer, tapi menggunakan cara mendaftar sebagai berikut.

(1) Kejadian munculnya 1 angka, AGGGG, GAGGG, dst ada 5 titik sampel.
(2) Kejadian munculnya 2 angka AAGGG, GAAGG, dst ada 10 titik sampel
(3) Kejadian munculnya 3 angka AAAGG, GAAAG, dst ada 10 titik sampel
(4) Kejadian munculnya 4 angka AAAAG, AAAGA, dst ada 5 titik sampel
(5) Kejadian munculnya 5 angka AAAAA ada 1 titik sampel

Jadi keseluruhan pada kejadian munculnya minimal 1 angka ada 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31 titik sampel, sehingga peluangnya = $\frac{31}{32}$.

<u>Perhatikan kembali contoh 8.</u>

Jika ditanyakan berapa peluang seorang mahasiswa yang dipilih secara acak tidak menghadiri seminar maka

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$
$$= 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

5. Dua Kejadian Saling Lepas atau Saling Asing

Kejadian A dan B dikatakan *saling lepas* atau *saling asing* apabila keduanya tidak mungkin terjadi bersama-sama, secara himpunan $A \cap B = \emptyset$. Oleh karenanya peluang gabungan A dan B adalah

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

Ilustrasi:

Misalkan dua dadu yang setimbang dilemparkan bersama-sama satu kali, maka ruang sampelnya adalah

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \mid x = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ &= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), \\ &\quad (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), \\ &\quad (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), \\ &\quad (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), \\ &\quad (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \end{aligned}$$

Pada setiap titik sampel itu, komponen pertama menyatakan hasil yang muncul dari dadu pertama, sedangkan komponen kedua menyatakan hasil yang muncul dari dadu kedua. Misalnya titik sampel (3, 5) menyatakan hasil bahwa dari dadu pertama muncul mata 3 dan dari dadu kedua muncul mata 5.

Misalkan A merupakan kejadian bahwa dari dadu pertama muncul mata 2, dan B adalah kejadian bahwa dari kedua dadu muncul mata yang jumlahnya lebih dari 9. Dalam notasi himpunan, kejadian A dan B dapat dinyatakan sebagai berikut.

$A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$

$B = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

$A \cup B = \{ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (4, 6), (5, 5),$

(5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }

Berdasarkan banyaknya titik sampel pada tiap-tiap kejadian diperoleh:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},\ P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},\ \text{dan } P(A \cup B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Apabila dianalisis, jika dari dadu pertama muncul mata 2, maka jumlah mata yang muncul dari kedua dadu pasti tidak lebih dari 8. Dengan kata lain, jika *A* terjadi, maka tidak mungkin *B* terjadi. Sebaliknyapun demikian, jika dari kedua dadu itu muncul mata yang jumlahnya lebih dari 9, maka mata yang muncul dari dadu-dadu tersebut pasti lebih dari 3. Ini berarti bahwa jika *B* terjadi, maka tidak mungkin *A* terjadi. Kejadian *A* dan *B* tidak memiliki titik sampel persekutuan, sehingga kejadian *A* dan *B* merupakan contoh kejadian saling lepas atau saling asing.

Contoh lain:

1. Pada percobaan pelemparan satu dadu, kejadian munculnya mata dadu ganjil dan kejadian munculnya mata dadu genap merupakan kejadian saling asing.
2. Pada percobaan pelemparan dua buah dadu, kejadian munculnya mata dadu berjumlah 3 dan kejadian munculnya mata dadu berjumlah 5 tidak memiliki titik sampel persekutuan, atau kedua kejadian saling asing atau saling lepas.

6. Kejadian Saling Bebas

Kejadian *A* dan *B* dikatakan saling bebas apabila A tidak mempengaruhi *B* dan juga *B* tidak mempengaruhi *A*. Sebagai ilustrasi, pada percobaan pelemparan uang logam dan dadu, kejadian munculnya angka (A) atau gambar (G) pada pelemparan uang logam tidak dipengaruhi oleh kejadian munculnya mata dadu, demikian sebaliknya. Misalkan *A* merupakan kejadian munculnya gambar dari percobaan pelemparan uang logam dan *B* merupakan kejadian munculnya mata dadu prima dari percobaan pelemparan sebuah dadu. Kejadian *A* tidak mempengaruhi kejadian *B*, dan sebaliknya, maka kejadikan *A* dan *B* pada ilustrasi ini merupakan kejadian yang saling bebas.

Teorema

Kejadian *A* dan *B* merupakan kejadian saling bebas apabila $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)}$

Contoh 10.

Sekeping uang logam dan sebuah dadu dilempar bersama-sama, berapakah peluang munculnya mata dadu ganjil dan gambar pada uang logam.

Jawab:

A = kejadian muncul gambar = {(G,1), (G,2), (G,3), (G,4), (G,5), (G, 6)}

B = kejadian muncul mata dadu ganjil = {(G,1), (G,3), (G,5), (A,1), (A,3), (A,5)}

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{2\times 6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{2\times 6} = \frac{1}{2}$,

Menurut teorema $P(A \cap B) = P(A).\, P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Menurut pengecekan langsung

$A \cap B$ = { (G, 1), (G, 3), (G, 5) }

$n(A \cap B) = 3$ dan $n(S) = 2 \times 6 = 12$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{3}{2 \times 6} = \frac{1}{4}$$

Ruang Probabilitas Hingga

Misalkan S suatu ruang sampel hingga $S = \{ a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n \}$. Suatu ruang probabilitas hingga diperoleh dengan memasangkan setiap titik $a_i \in S$ dengan suatu bilangan riil p_i yang merupakan peluang dari kejadian a_i.

Ruang probabilitas hingga memenuhi syarat:

(i) setiap p_i tidak negatif

(ii) jumlah dari p_i sama dengan satu, $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$.

Contoh 11.

Misalkan tiga uang logam dilempar bersama-sama dan banyaknya bagian gambar yang muncul diamati. Kejadian-kejadian yang mungkin muncul adalah tidak ada gambar yang muncul, ada tepat 1 gambar yang muncul, ada tepat 2 gambar yang muncul, atau ada 3 gambar yang muncul.

Ruang sampelnya merupakan banyaknya gambar yang mungkin muncul dari pelemparan tiga uang logam, yaitu $S = \{ 0, 1, 2, 3 \}$

Bandingkan bahwa S = {*AAA*, *AAG, AGA, GAA*, *AGG, GAG, GGA*, *GGG*}

Kita peroleh pasangan probabilitas dengan pasangan berikut

$P(0) = \frac{1}{8}$, $P(1) = \frac{3}{8}$, $P(2) = \frac{3}{8}$ dan $P(3) = \frac{1}{8}$.

Jelas semua probabilitasnya tak negatif dan jumlahnya

$$\sum_{i=0}^{3} P(i) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Misalkan *A* adalah kejadian munculnya gambar sedikitnya pada satu uang logam, maka *A* = {1, 2, 3} dan *P*(*A*) = *P*(1) + *P*(2) + *P*(3) = 3/8 + 3/8 + 1/8 = 7/8

Misalkan B adalah kejadinya munculnya semua gambar atau semua angka,

B = {3, 0} dan *P*(*B*) = *P*(3) + *P*(0) = 1/8 + 1/8 = 1/4.

<u>Contoh 12.</u>

Tiga ekor kuda *A*, *B* dan *C* sedang berpacu. Peluang untuk menang kuda *A* adalah dua kali peluang menang kuda *B*, peluang menang kuda *B* adalah dua kali peluang menang kuda *C*. Berapakah peluang kemenangan masing-masing ?

Jawab :

Misalkan *P*(*C*) = *p*, maka *P*(*B*) = 2*p* dan *P*(*A*) = 2 *P*(*B*) = 2 . 2*p* = 4*p*

Karena merupakan ruang probabilitas hingga maka

P(*A*) + *P*(*B*) + *P*(*C*) = 1 sehingga 4*p* + 2*p* + *p* = 1,

diperoleh *p* = $\frac{1}{7}$.

Jadi *P*(*A*) = $\frac{4}{7}$, *P*(*B*) = $\frac{2}{7}$ dan *P*(*C*) = $\frac{1}{7}$.

Jika ditanyakan berapakah peluang *A* atau *B* menang, maka jawabannya adalah

P(*A* atau *B*) = *P*(*A*) + *P*(*B*) = $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$.

Soal Latihan

1. Untuk percobaan pelemparan 4 uang logam, tentukan S dan $n(S)$!
2. Untuk percobaan pelemparan k uang logam, berapakah $n(S)$!
3. Untuk percobaan pelemparan 1 dadu, tentukan S dan $n(S)$!
4. Untuk percobaan pelemparan 2 dadu, tentukan S dan $n(S)$!
5. Untuk percobaan pelemparan k dadu, tentukan $n(S)$!
6. Untuk percobaan pelemparan 1 uang logam dan 1 dadu, tentukan S dan $n(S)$!
7. Untuk percobaan pelemparan 2 uang logam dan 1 dadu, tentukan S dan $n(S)$!
8. Untuk percobaan pelemparan m uang logam dan n dadu, tentukan $n(S)$!
9. Pada percobaan pelemparan tiga uang logam, tentukan kejadian munculnya gambar minimal dua kali!
10. Pada percobaan pelemparan dua buah dadu, tentukan kejadian munculnya kedua mata dadu merupakan bilangan prima!
11. Pada percobaan pelemparan dua buah dadu, tentukan kejadian munculnya mata dadu – mata dadu yang jumlahnya prima!
12. Pada percobaan pelemparan sebuah koin dan dua buah dadu, tentukan kejadian munculnya mata dadu jumlahnya 11 dan gambar!
13. Dua dadu dilempar satu kali, berapakah peluang munculnya mata dadu yang jumlahnya sama dengan 6?
14. Dua dadu dilempar satu kali, berapakah peluang munculnya mata dadu yang hasil kalinya sama dengan 6?

15. Tiga dadu dilempar satu kali, berapakah peluang munculnya mata dadu yang jumlahnya 12?
16. Tiga dadu dilempar satu kali, berapakah peluang munculnya mata dadu yang hasilkalinya 12?
17. Enam buah kartu diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5 dan 6. Kemudian diambil dua kartu secara acak, berapakah peluang kedua kartu yang terambil jumlahnya 8?
18. Enam dadu dilempar secara bersama-sama, Berapakah banyaknya kejadian yang menunjukkan hasil kali dari mata dadu yang muncul adalah 240?
19. Sebuah kartu diambil dari 50 kartu yang diberi nomor 1, 2, 3, …, 50. Berapakah peluang bahwa kartu yang terambil bernomor bilangan

    (a) prima

    (b) berangka akhir 2

    (c) berkelipatan 3 atau berkelipatan 4

    (d) berkelipatan 4 dan berkelipatan 6
20. Dalam suatu rapat yang dihadiri 10 orang, 4 diantaranya mengenakan seragam berwarna cokelat. Dua orang perserta rapat diambil secara acak lewat pengundian, berapakah peluang bahwa

    (a) keduanya berseragam coklat

    (b) keduanya tidak berseragam cokelat

    (c) satu berseragam dan satu tidak

    (d) Minimal satu orang berseragam cokelat.
21. Dalam satu kelas, terdapat 21 anak laki-laki dan 15 perempuan. Tiga anak laki-laki berkacamata dan lima perempuan

berkacamata. Seorang murid dipilih secara acak dari kelas tersebut. Tentukan.

(a) peluang bahwa murid tersebut laki-laki.

(b) peluang murid tersebut memakai kacamata.

(c) peluang murid tersebut adalah anak laki-laki yang berkacamata.

(d) Jika seorang gadis terpilih secara acak dari kelas, tentukan peluang gadis tersebut memakai kacamata.

(e) Jika seorang murid berkacamata terpilih secara acak dari kelas, tentukan peluang bahwa murid itu adalah anak laki-laki.

22. Sepuluh mahasiswa *A, B, C, D, E, F, G, H, I* dan *J* merupakan calon pengurus senat mahasiswa. Jika pemilihan dilakukan secara acak dengan lot (arisan), maka berapakah peluang

    (a) *A* termasuk pengurus senat

    (b) *B* termasuk pengurus senat

    (c) *A* dan *B* termasuk pengurus senat.

23. Sebuah uang logam dilempar enam kali. Berapakah peluang munculnya gambar paling sedikit sekali ?

24. Sebuah kantong berisi dua bola hitam dan 4 putih. Sedangkan kantong lain berisi 5 bola hitam dan 3 putih. Jika sebuah bola diambil dari tiap kantong, berapa peluang yang terambil

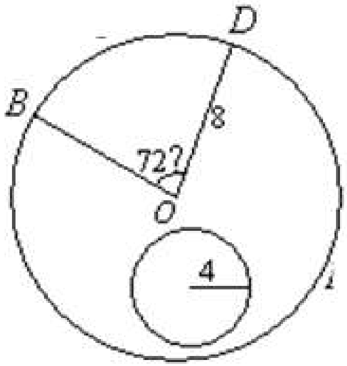
    (a) keduanya putih

    (b) keduanya hitam

    (c) satu hitam dan satu putih

25. Tiga kartu diambil dari seperangkat kartu bridge, berapakah peluang yang terambil adalah
    (a) 2 King dan 1 As
    (b) paling sedikit 2 Jack
26. Dua kartu diambil dari seperangkat kartu bridge, berapakah peluang bahwa yang terambil adalah
    (a) Bergambar atau berangka sama (misal King dengan king, 2 dengan 2 dst)
    (b) Berjenis sama (misal wajik dengan wajik, dst)
27. Dua buah bilangan diambil dari sekelompok bilangan { 1, 2, 3, 4, …, *n* } dimana *n* berkelipatan 4. Berapakah peluang bahwa terambil
    (a) yang satu merupakan kelipatan 4 lainnya
    (b) yang satu merupakan kelipatan dari lainnya, untuk $n = 12$.
28. Satu keluarga yang beranggotakan ayah, ibu, dan 4 orang anak akan duduk dalam satu baris. Tentukan peluang ayah dan ibu duduk tidak saling berdekatan/ bersampingan.
29. Diketahui A dan B adalah kejadian yang saling bebas dengan $P\,(A \cap B) = 0{,}2$ dan $P\,(A' \cap B) = 0{,}6$. Tentukan $P(A \cup B)$!
30. Seorang pengusaha akan mendirikan dua perusahaan di kota A dan B dengan $P(A) = 0{,}6$ dan $P(B) = 0{,}8$.Tentukan peluang perusahaan, jika didirikan:
    (a) di kota A dan di kota B
    (b) tidak di kota A dan B
    (c) di kota A tetapi tidak di kota B
    (d) tidak di kota A tetapi di kota B

31. Anisa dan Berta berjanji untuk belajar bersama di perpustakaan. Mereka berjanji bertemu satu sama lain antara 8.00 dan 9.00. Anisa menunggu Berta selama 10 menit dan Berta menunggu Anisa selama 20 menit. Tentukan peluang Anisa dan Berta akan bertemu.
32. Perhatikan gambar berikut.



Gambar tersebut menunjukkan pusat lingkaran O dengan jari-jari $8\,cm$. Jari-jari lingkaran yang lebih kecil adalah $4\ cm.$ Sebuah titik dipilih secara acak di dalam lingkaran besar. Hitung peluang letak titik tersebut

(a) berada di dalam juring BOD

(b) berada di dalam lingkaran yang lebih kecil

(c) tidak berada di juring BOD maupun di lingkaran yang lebih kecil

33. Dinda mengendarai sebuah mobil yang berada di suatu barisan mobil, dengan jarak sekitar 50 meter di antara mobil-mobil yang beriringan. Setiap mobil panjangnya 4 meter. Di jembatan layang berikutnya, terdapat pohon besar yang akan tumbang ke jalan raya. Jika pohon tumbang dalam jarak 10 meter dari depan

mobil, itu akan menyebabkan kecelakaan. Berapa peluang pohon tersebut akan menyebabkan kecelakaan?

34. Dalam sebuah kotak yang alasnya berbentuk persegi (dengan sisi *a* meter) ditempatkan kelereng-kelereng hingga memenuhi alasnya tanpa ada yang bertumpukan. Sebuah kelereng diambil, berapakah peluang bahwa kelereng yang terambil jaraknya dari titik-titik sudutnya tidak lebih dari *a* meter ?
35. Sebuah lantai datar ditutupi dengan kertas berpetak. Petak-petak berbentuk persegi dengan panjang sisi 2 cm. Apabila sebuah mata uang logam berbentuk lingkaran dengan garis tengah 1 cm dilambungkan dan jatuh mendarat di lantai tersebut, berapa peluang bahwa mata uang tersebut menutup bagian sisi persegi tersebut? *Hint: hitunglah luas daerah di dalam persegi yang memungkinkan mata uang tersebut sama sekali tidak bersekutu titik dengan sisi persegi tersebut.*
36. Seorang tukang ketik akan mengetik persamaan kuadrat $a\,x^2 + b\,x + c = 0$. Akan tetapi bilangan bilangan pada a, b, dan c tidak terlihat jelas sehingga dia mengalami kesulitan. Yang dia ketahui hanyalah a, b, c merupakan bilangan bulat satu angka. Berapakah peluang bahwa persamaan kuadrat yang diketikkannya mempunyai akar riil ?
37. Suatu koin diberi bobot sehingga peluang munculnya angka adalah tiga kali peluang munculnya gambar. Tentukan peluang $P(A)$ dan $P(G)$!
38. Tiga mahasiswa A, B dan C mengikuti perlombaan renang. Peluang A dan B untuk menang adalah sama, sedang peluang C untuk menang adalah sepertiga peluang menang B. Tentukan

peluang *B* atau *C* untuk menang dalam perlombaan renang tersebut ?

39. Suatu dadu dibuat sedemikian rupa sehingga muncul bilangan genap mempunyai peluang yang sama dan munculnya bilangan ganjil juga mempunyai peluang yang sama. Jika peluang munculnya tiap bilangan genap adalah dua kali peluang munculnya bilangan ganjil, maka tentukanlah peluang munculnya

    (a) bilangan genap

    (b) bilangan ganjil

    (c) bilangan prima

    (d) bilangan ganjil yang prima

BAB 4
PELUANG BERSYARAT

KEMAMPUAN AKHIR

Mahasiswa dapat menentukan nilai peluang bersyarat menggunakan teorema perkalian dan diagram pohon untuk proses stokastik hingga.

CAPAIAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat membedakan peluang biasa dan bersyarat
2. Mahasiswa dapat menentukan nilai peluang bersyarat
3. Mahasiswa dapat menggunakan teorema peluang bersyarat untuk menentukan peluang kejadian bersyarat
4. Mahasiswa dapat menggunakan teorema peluang bersyarat untuk menentukan peluang kejadian bebas
5. Mahasiswa dapat menentukan peluang suatu kejadian berurutan hingga menggunakan diagram pohon dari proses stokastik

PENYAJIAN

Dalam bab ini akan dipelajari mengenai peluang bersyarat, teorema perkalian peluang bersyarat, proses stokastik hingga, diagram pohon dan kebebasan.

URAIAN MATERI

Peluang Bersyarat

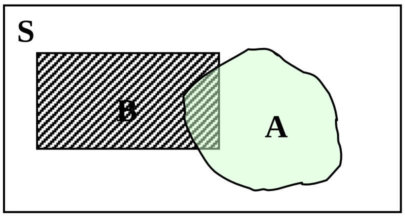
Dua kejadian A dan B disebut kejadian bersyarat atau kejadian yang saling bergantung apabila terjadi atau tidak terjadinya kejadian A akan mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya kejadian B.

Misalkan B merupakan suatu kejadian sebarang pada ruang sampel S dengan $P(B) > 0$. Peluang kejadian A terjadi, apabila B telah terjadi (dengan kata lain: Peluang bersyarat A jika B diketahui), ditulis $P(A|B)$ didefinisikan sebagai berikut.

Definisi

Peluang bersyarat terjadinya A dengan syarat bahwa B terjadi adalah peluang terjadinya A apabila ruang sampelnya B. Hal ini dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ dengan syarat } P(B) \neq 0$$



Dalam diagram Venn diatas, $P(A|B)$ merupakan ukuran besarnya kemungkinan relatif A terhadap ruang sederhana B.

Dalam hal khusus, misalkan *S* merupakan ruang probabilitas sama dan misalkan notasi $|\boldsymbol{A}|$ merupakan banyaknya anggota pada kejadian *A*, maka

$$P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|S|}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|S|}, \text{ sehingga } P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{|A \cap B|}{|B|}$$

Dengan kata lain, $P(A|B)$ dirumuskan dengan banyaknya cara *A* dan *B* dapat terjadi dibagi dengan banyaknya cara *B* dapat terjadi.

<u>*Contoh 1.*</u>

Dua dadu dilempar bersamaan. Jika dua mata dadu yang muncul berjumlah 7, tentukan peluang bahwa salah satu dadu yang muncul adalah bermata 2.

Jawab:

Ruang sampel

S = {(*x*,*y*) | *x* = 1, 2, 3, 4, 5, 6; *y* = 1, 2, 3, 4, 5, 6}

= {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

B = kejadian jumlah kedua mata dadu adalah 7

B = { (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) } ➔ |B| = 6

A = { 2 muncul paling sedikit pada satu dadu }

A = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (6,2), (5,2), (4,2), (3,2), (1,2)} ➔ |A| = 11

$A \cap B$ = { (2,5), (5,2) } ➔ $|A \cap B| = 2$

$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Contoh 2.

Sekeping koin dengan sisi angka dan gambar ditos sebanyak 5 kali. Peluang kejadian munculnya tepat 4 kali sisi angka jika telah dipastikan bahwa pada pengetosan pertama muncul sisi angka adalah ...

Jawab:

Ruang sampel

$S = \{AAAAA, AAAAG, AAAGA, \dots, GGGGG\}$

$|S| = 2^5 = 32$

$E =$ kejadian muncul tepat 4 kali sisi angka

$E = \{AAAAG, AAAGA, AAGAA, AGAAA, GAAAA\}$

$|E| = 5$

$F =$ kejadian pengetosan pertama muncul sisi angka

$F = \{AAAAA, AAAAG, AAAGA, AAAGG, AAGAA, AAGAG, AAGGA,$
$AAGGG, AGAAA, AGAAG, AGAGA, AGAGG, AGGAA, AGGAG,$
$AGGGA, AGGGG\}$

$|F| = 16 = 2^4$

$E \cap F = \{AAAAG, AAAGA, AAGAA, AGAAA\}$

$|E \cap F| = 4$

$P(E|F) = \frac{|E \cap F|}{|F|} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Contoh 3.

Sebanyak 12 mahasiswa semester V, 18 mahasiswa semester III, dan 35 mahasiswa semester I mengikuti kelas mata kuliah Teori Peluang. Nilai akhir menunjukkan bahwa sebanyak 3 mahasiswa semester V, 10 mahasiswa semester III, dan 5 mahasiswa semester I mendapatkan nilai A. Jika seorang mahasiswa dipilih secara acak dari kelas tersebut dan diketahui mendapatkan nilai A, peluang bahwa mahasiswa itu semester V adalah ...

Jawab:

$|S| = 12 + 18 + 35 = 65$

$C =$ kejadian terpilih mahasiswa yang mendapat nilai A

$|C| = 3 + 10 + 5 = 18$

$E =$ kejadian terpilih mahasiswa semester V

$|E| = 12$

$|C \cap E| = 3$

$P(E|C) = \frac{|C \cap E|}{C} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

Aturan Perkalian Peluang Bersyarat

Aturan perkalian peluang bersyarat atau sifat perkalian peluang bersyarat.
Berdasarkan hubungan

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

maka

$$P(A \cap B) = P(A|B). P(B)$$

<u>*Contoh 4.*</u>

Dalam sebuah kotak terdapat 6 bola merah dan 4 bola putih. Jika sebuah bola diambil dalam kotak itu berturut-turut sebanyak dua kali tanpa pengembalian. Tentukan peluang yang terambil kedua-duanya bola merah.

Jawab:

Misalkan

A adalah kejadian pengambilan bola pertama mendapat merah,

B adalah kejadian pengambilan bola kedua mendapat merah.

$P(A) = \frac{6}{10}$; $P(B \mid A) = \frac{5}{9}$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

Jadi, peluang yang terambil kedua-duanya bola merah tanpa pengembalian adalah $\frac{1}{3}$.

Contoh 5.

Diketahui terdapat suatu kotak yang berisi 30 unit lampu, 6 di antaranya sudah rusak. Jika dua lampu diambil secara acak dan pengambilannya dilakukan satu persatu, maka peluang dua lampu yang diambil tersebut rusak adalah ...

Jawab:

Misalkan

E adalah kejadian pengambilan lampu pertama rusak,

F adalah kejadian pengambilan lampu kedua rusak.

Notasi $E \cap F$ dapat ditafsirkan sebagai terjadinya kejadian E, kemudian diikuti oleh terjadinya F setelah E terjadi).

$$P(E) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

$$P(F|E) = \frac{6-1}{30-1} = \frac{5}{29}$$

Dengan demikian, peluang dua lampu yang diambil tersebut rusak adalah

$$P(E \cap F) = P(E).P(F|E) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{29} = \frac{1}{29}$$

Contoh 6.

Peluang seorang dokter mendiagnosis suatu penyakit secara benar sama dengan 0,75. Jika peluang pasien akan menuntut dokter itu setelah dokter itu salah mendiagnosis penyakit sebesar 0,92 maka peluang dokter itu salah mendiagnosis dan dituntut oleh pasien adalah ...

Jawab:

Misalkan

E adalah kejadian bahwa pasien akan menuntut dokter,

F adalah kejadian dokter salah mendiagnosis penyakit.

Berarti F^C adalah kejadian dokter mendiagnosis suatu penyakit secara benar, sehingga $P(F^C) = 0{,}75$

$P(F) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$

$P(E|F) = 0{,}92$

sehingga diperoleh

$P(E \cap F) = P(A|F).P(F) = (0{,}92).(0{,}25) = 0{,}23$

Teorema Perkalian Peluang Bersyarat

Jelas bahwa $P(B \cap A) = P(B).P(A|B)$

Perluasan dari teorema ini adalah

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n) =$

$P(A_1).P(A_2|A_1).P(A_3|A_1 \cap A2).P(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3) \dots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1})$

Contoh 7.

Sebuah kotak berisi 12 benda yang 4 diantaranya rusak. Tiga benda diambil secara acak satu per satu. Tentukan peluang bahwa ketiga benda yang terambil tidak rusak.

Jawab:

Peluang benda pertama yang terambil tidak rusak adalah $\frac{8}{12}$.

Peluang benda kedua yang terambil tidak rusak adalah $\frac{7}{11}$. (karena benda tak rusak telah terambil 1, sehingga benda tidak rusak yang tersisa adalah 7 dari 11 benda secara keseluruhan)

Peluang benda pertama terambil tidak rusak adalah $\frac{6}{10}$. (karena benda tak rusak sudah terambil 2 buah, sehingga benda tidak rusak masih 6 dari 10 benda secara keseluruhan)

Peluang ketiga benda yang terambil tak rusak $= \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10}$

$$= \frac{336}{1320}$$

$$= \frac{14}{55}$$

Contoh 8.

Sebuah kelas terdiri dari 12 murid laki-laki dan 4 murid perempuan. Jika tiga murid dipilih secara acak, berapakah peluang bahwa murid yang terpilih ketiganya laki-laki ?

Jawab:

Peluang murid terambil pertama laki-laki adalah $\frac{12}{16}$

Peluang murid terambil kedua laki-laki adalah $\frac{11}{15}$

Peluang murid terambil ketiga laki-laki adalah $\frac{10}{14}$

Peluang ketiganya laki-laki adalah $\frac{12}{16} \cdot \frac{11}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{1320}{3360} = \frac{11}{28}$

Cara lain

Banyaknya cara memilih 3 murid dari 16 murid adalah $C(16, 3) = 560$

Banyaknya cara memilih 3 murid dari 12 murid laki-laki adalah $C(12, 3) = 220$

Peluangnya adalah $\frac{220}{560} = \frac{11}{28}$.

Proses Stokastik Hingga dan Diagram Pohon

Suatu barisan (berhingga) dari percobaan-percobaan (yang mempunyai hasil yang banyaknya berhingga) disebut **proses stokastik** (berhingga). Proses dan perhitungan peluang dari proses stokastik adalah menggunakan diagram pohon, teorema perkalian digunakan untuk menghitung peluang yang hasilnya direpresentasikan oleh cabang-cabang pohon.

Contoh 9.

Diberikan tiga kotak dengan isi masing-masing kotak sebagai berikut

Kotak A berisi 10 bola lampu dimana 4 diantaranya rusak,

kotak B berisi 6 bola lampu dimana 1 diantaranya rusak,

kotak C berisi 8 bola lampu dimana 3 diantaranya rusak,

Apabila dipilih sebuah kotak secara acak, kemudian diambil sebuah bola lampu juga secara acak, maka berapakah peluang bahwa bola lampu yang terambil rusak ?

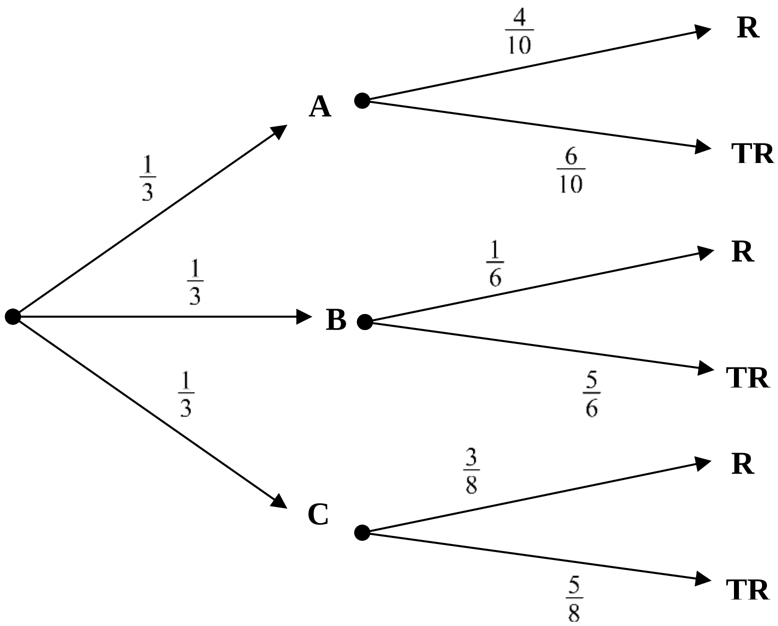
Jawab:

Pada permasalahan ini kita dapat membentuk sebuah barisan dari dua percobaan, yaitu

(i) memilih satu kotak

(ii) memilih satu bola lampu, rusak (R) atau tidak rusak (TR)

Proses stokastik disertai peluang tiap cabangnya disajikan dalam diagram pohon berikut



Peluang bola yang teambil rusak adalah berasal dari kotak A atau kotak B atau kotak C

$$= \frac{1}{3} . \frac{4}{10} + \frac{1}{3} . \frac{1}{6} + \frac{1}{3} . \frac{3}{8} = \frac{8}{72} = \frac{1}{9}$$

Kebebasan

Suatu kejadian *B* dikatakan bebas dari kejadian *A*, jika peluang terjadinya *B* tidak dipengaruhi oleh apakah *A* terjadi atau tidak terjadi. Dengan demikian dapatdikatakan bahwa kejadian *A* tidak ada pengaruhnya terhadap kejadian *B*, sehingga peluang *B* sama dengan peluang bersyarat *B*, jika *A* diketahui, yaitu P(B) = P(B|A).

Menurut teorema perkalian $P(A \cap B) = P(A) . P(B \mid A)$ dan hubungan peluang kejadian saling bebas $P(B) = P(B|A)$ diperoleh:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)}$$

Dengan demikian kejadian *A* dan *B* disebut saling bebas apabila $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, dalam hal lain dikatakan tidak bebas atau tergantung.

<u>Contoh 10.</u>

Misalkan sebuah koin dilempar tiga kali. A adalah kejadian munculnya angka pada lemparan pertama. B adalah kejadian munculnya angka pada lemparan kedua dan C adalah kejadian munculnya angka dua kali pada lemparan yang berurutan. Manakah kejadian-kejadian yang saling bebas?

Jawab:

Ruang probabilitas samanya adalah

S = { AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GAG, GGA, GGG}➔ n(S) = 8

Kejadian A dan B jelas saling bebas karena saling tidak mempengaruhi

Sedangkan A dan C atau B dan C belum jelas, dan akan diselediki.

P(A) = P({AAA, AAG, AGA, AGG}) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(B) = P(\{AAA, AAG, GAA, GAG\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P(C) = P(\{AAG, GAA\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

$P(A \cap B) = P(\{AAA, AAG\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P(A \cap C) = P(\{AAG\}) = \frac{1}{8}$

$P(B \cap C) = P(\{AAG, GAA\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Selanjutnya $P(A) . P(B) = \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$,

sehingga A dan B bebas

$P(A) . P(C) = \frac{1}{2} . \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A \cap C)$,

sehingga A dan C bebas

$P(B) . P(C) = \frac{1}{2} . \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} = P(B \cap C)$,

sehingga B dan C tidak bebas

Contoh 11.

Suatu yayasan pemadam kebakaran memiliki 1 unit mobil pemadam kebakaran dan 1 unit ambulans. Ketika terjadi situasi darurat, peluang mobil pemadam kebakaran siap beroperasi adalah 0,96 sedangkan peluang ambulans siap beroperasi adalah 0,88. Jika kejadian beroperasinya kedua kendaraan tersebut merupakan kejadian bebas, maka peluang keduanya siap beroperasi adalah …

Jawab:

Misalkan

E adalah peluang mobil pemadam kebakaran siap beroperasi,

F adalah peluang ambulans siap beroperasi.

Karena E dan F merupakan kejadiyang saling bebas, maka

$P(E \cap F) = P(E).P(F) = (0{,}96).(0{,}88) = 0{,}8448$

Perluasan Kejadian Saling Bebas

Tiga kejadian A, B dan C adalah saling bebas apabila

(i) setiap dua kejadian adalah saling bebas, yaitu A dan C, A dan B, serta B dan C saling bebas.

(ii) P(A $\cap$ B $\cap$ C) = P(A) . P(B) . .P(C)

Soal Latihan

1. Sebuah kartu diambil secara acak dari 52 buah kartu bridge. Tentukan peluang terambil kartu skop atau kartu berwarna merah.
2. Jika sebuah dadu dilempar sekali, tentukan peluang munculnya angka dadu bilangan prima atau bilangan genap.
3. Dalam pelemparan dua buah dadu sekaligus, berapakah peluang keluarnya dadu pertama angka 1 dan dadu kedua angka 4.
4. Dalam kantin sekolah terdapat 30 siswa, di mana 12 siswa sedang minum es dan makan soto, 20 siswa sedang minum es dan makan bakso, sedangkan 3 siswa hanya duduk. Tentukan peluang yang minum es saja.
5. Dalam kotak terdapat 10 bola, 5 bola berwarna putih, 1 bola merah dan lainnya berwarna kuning. Jika sebuah bola diambil secara acak, berapa peluang:
    a. terambil bola berwarna kuning,
    b. terambil bola tidak berwarna kuning.
6. Sebuah dadu dilempar satu kali. Tentukan peluang keluarnya bilangan genap, bila telah diketahui telah keluar bilangan lebih dari 5.
7. Sebuah dadu dilempar. Jika yang muncul bilangan genap, berapakah peluang yang muncul adalah bilangan prima ?
8. Dua buah dadu dilempar bersamaan. Jika bilangan yang muncul adalah berlainan, maka berapakah peluang bahwa jumlah bilangan yang muncul adalah genap ?
9. Seseorang menerima pembagian 5 kartu berwarna merah dari seperangkat kartu bridge. Berapakah peluang bahwa kelima

kartu yang didapatkan adalah semacam, yaitu hati semua atau wajik semua ?

10. Dua angka yang berlainan dipilih secara acak dari angka 1 hingga 9.
    a. Jika jumlahnya ganjil, berapakah peluang bahwa angka 2 merupakan salah satu angka yang terpilih ?
    b. Jika angka 2 merupakan salah satu yang terpilih, berapakah peluang bahwa kedua angka yang terpilih berjumlah ganjil ?
11. Sebuah kelas memiliki 10 siswa laki-laki dan 5 perempuan. Tiga siswa dipilih secara acak satu per satu. Tentukan peluang bahwa
    a. dua siswa pertama adalah laki-laki dan yang ketiga perempuan,
    b. yang pertama dan ketiga laki-laki dan yang kedua perempuan,
    c. yang pertama dan ketiga berjenis kelamain sama dan yang kedua berbeda.
12. **Pada soal no. 11**. Jika siswa pertama dan ketiga dipilih dari yang berkelamin sama dan yang kedua berbeda, berapa peluang bahwa siswa yang kedua berjenis kelamin perempuan ?
13. Dalam sebuah kotak terdapat 6 kelereng merah dan 4 kelereng putih. Dari dalam kotak itu diambil sebutir kelereng secara berurutan sebanyak dua kali. Setelah kelereng pertama diambil, kelereng itu tidak dikembalikan ke dalam kotak, melainkan langsung mengambil kelereng yang kedua. Tentukan peluang yang terambil itu adalah:

a. Kelereng merah pada pengambilan pertama dan kedua,
b. Kelereng putih pada pengambilan pertama dan kedua,
c. Kelerang merah pada pengambilan pertama dan kelereng putih pada pengambilan kedua,
d. Kelereng putih pada pengambilan pertama dan kelereng merah pada pengambilan kedua

14. Suatu toples berisi 10 kelereng yang terdiri dari 7 kelereng hitam dan 3 kelereng putih. Dua kelereng diambil tanpa pengembalian. Tentukan:
    a. Peluang kedua kelereng tersebut berwarna hitam
    b. Peluang bahwa tepat satu kelereng berwarna hitam
    c. Peluang bahwa setidaknya satu kelereng berwarna hitam
15. Sebuah keluarga memiliki dua orang anak dengan asumsi bahwa anak laki-laki dan perempuan memiliki peluang yang sama berada dalam keluarga tersebut. Tentukan peluang bahwa keluarga tersebut memiliki…
    a. Seorang anak laki-laki dan seorang anak perempuan jika anak pertama adalah laki-laki.
    b. Dua orang anak perempuan jika setidaknya salah satunya adalah perempuan
    c. Dua orang anak perempuan jika anak yang lebih tua adalah perempuan
16. Di suatu kota, 40% penduduk berambut coklat, 25% bermata coklat, dan 15% berambut coklat dan bermata coklat. Seorang penduduk dipilih secara acak.
    a. Jika ia berambut coklat, berapa peluang ia juga bermata coklat ?

b. Jika ia bermata coklat, berapa peluang ia tidak berambut coklat ?
c. Berapa peluang ia tidak berambut coklat juga tidak bermata coklat ?

17. Dalam sekelompok anak, jika seorang anak dipilih secara acak, peluang dia menyukai jeruk adalah 0,6, peluang dia menyukai jeruk dan apel adalah 0,3. Jika seorang anak yang menyukai jeruk dipilih secara acak, berapa besar kemungkinan dia juga menyukai apel?
18. Suatu kelompok yang terdiri dari 200 orang siswa ditanya apakah mereka bermain sepak bola atau bola basket. Di antara kelompok tersebut, 120 mengatakan mereka bermain sepak bola, 50 mengatakan mereka bermain bola basket dan 20 mengatakan mereka bermain sepak bola dan bola basket. Seorang siswa dipilih secara acak dari kelompok tersebut.
    a. Jika ia bermain bola basket, berapa peluang ia juga bermain sepak bola?
    b. Jika ia bermain sepak bola, berapa peluang ia juga bermain bola basket?
    c. Jika ia hanya bermain satu jenis permainan saja, berapa peluang ia bermain sepak bola?
19. Suatu kelompok yang terdiri dari 120 orang ditanya apakah mereka memiliki motor atau sepeda. 90 mengatakan mereka memiliki motor, 40 mengatakan memiliki sepeda dan 10 mengatakan mereka tidak memiliki motor ataupun sepeda.

    Jika seseorang dipilih secara acak dari sekelompok orang tersebut, berapakah peluang orang tersebut:

a. Memiliki motor dan sepeda

b. Memiliki motor jika ia juga memiliki sepeda

c. Memiliki sepeda jika ia juga memiliki motor atau sepeda, tetapi tidak keduanya

20. Misalkan A dan B kejadian dengan P(A) = $\frac{1}{3}$, P(B) = $\frac{1}{4}$ dan P(A∪B) = $\frac{1}{2}$. Tentukanlah:

a. P(A | B)

b. P(B | A)

c. P(A ∩ B)

21. Misalkan S = { a, b, c, d, e, f }

dengan P(a) = $\frac{1}{16}$, P(b) = $\frac{1}{16}$, P(c) = $\frac{1}{8}$, P(d) = $\frac{3}{16}$, P(e) = $\frac{1}{4}$, dan P(f) = $\frac{5}{16}$. Misalkan A = { a, c, e }, B = { c, d, e, f } dan C = {b, e, f }.

Tentukanlah:

a. P(A | B)

b. P(B | C)

c. P(C | A)

d. P(A | C)

22. Di suatu sekolah, 25% siswa laki-laki dan 10% siswa perempuan belajar matemátika. Sekolah tersebut memiliki 60% siswa perempuan. Jika dipilih seorang siswa secara acak dan belajar matemátika, tentukan peluang bahwa siswa yang terpilih ádalah perempuan.

23. Diketahui dua Mangkok sebagai berikut

Mangkok A berisi 5 kelereng merah, 3 putih, dan 8 biru.

Mangkok B berisi 3 kelereng merah dan 5 putih

Sebuah dadu dilempar, jira bilangan 3 atau 6 muncul, sebuah kelereng diambil dari mangkok B, selain kondisi itu diambil sebuah kelereng dari mangkok A.

a. Tentukanlah peluang sebuah kelereng merah terambil
b. Tentukanlah peluang sebuah kelereng putih terambil
c. Tentukanlah peluang sebuah kelereng biru terambil
d. Jika sebuah kelereng merah terambil, berapa peluang bahwa kelereng tersebut berasal dari mangkok A ?
e. Jika sebuah kelereng putih terambil, berapa peluang bahwa dadu yang muncul bilangan 5 ?

24. Mangkok A berisi 5 kelereng merah dan 3 putih, dan mangkok B berisi 2 kelereng merah dan 6 kelereng putih.
    a. Jika sebuah kelereng diambil dari tiap-tiap mangkok, maka berapakah peluang bahwa kedua kelereng yang terambil berwarna sama ?
    b. Jika dua kelereng diambil dari tiap-tiap mangkok, maka berapakah peluang bahwa keempat kelereng yang terambil berwarna sama ?
25. Sebuah kartu diambil secara acak dari setumpuk kartu bridge. Tentukan peluang :
    a. Muncul kartu King
    b. Muncul kartu berwarna merah
    c. Muncul kartu King berwarna merah
    d. Muncul kartu King jika yang terambil adalah kartu berwarna merah

e. Muncul kartu berwarna merah jika yang terambil adalah King
f. Muncul As jika yang terambil adalah Hati

26. Sebuah kotak berisi tiga buah koin. Dua koin biasa dan satu koin palsu (kedua sisi koin tersebut adalah gambar yang berarti peluang muncul gambar adalah 1)
    a. Sebuah koin diambil secara acak kemudian dilemparkan. Tentukan peluang muculnya gambar.
    b. Sebuah koin diambil secara acak kemudian dilemparkan dan muncul kepala. Tentukan peluang bahwa koin tersebut adalah koin palsu (koin dengan kedua sisi adalah gambar)
27. Diketahui suatu kejadian A dan B sedemikian sehingga $P(A) = 0{,}62$ dan $P(A \cap B) = 0{,}18$. Tentukan:
    a. $P(A \cap B^C)$
    b. Jika diketahui $P((A \cup B)^C) = 0{,}19$, tentukan $P(A|B^C)$.
28. Misalkan tiga koin dilempar bersamaan. A merupakan kejadian munculnya semuanya angka atau semuanya gambar. B merupakan kejadian munculnya sedikitnya satu angka. C merupakan kejadian munculnya angka paling banyak. Tentukanlah dari pasangan (A, B), (A, C), dan (B, C) manakah yang saling bebas ?
29. Buktikan bahwa jira A dan B saling bebas, maka A dan B^c saling bebas dan A^c dan B juga saling bebas.
30. Peluang tembakan A mengenai sasaran adalah $\frac{1}{4}$ dan peluang tembakan B mengenai sasaran adalah $\frac{1}{3}$.

a. Jika masing-masing menembak dua kali, berapa peluang bahwa sasaran akan terkena tembakan paling sedikit sekali ?
b. Jika masing-masing menembak sekali dan sasaran terkena tembak hanya sekali, maka berapakah peluang tembakan A mengenai sasaran ?
c. Jika A hanya menembak dua kali, berapa kali B harus menembak demikian sehingga paling sedikit 90% peluang sasaran terkena tembakan ?

BAB 5
PEUBAH ACAK

KEMAMPUAN AKHIR

Mahasiswa dapat menentukan distribusi dan harapan dari suatu peubah acak

CAPAIAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat menentukan peluang pada percobaan berulang dengan dua pemunculan
2. Mahasiswa dapat membuat distribusi suatu peubah acak
3. Mahasiswa dapat menentukan nilai harapan dari suatu peubah acak
4. Mahasiswa dapat menerapkan perhitungan nilai harapan pada suatu permainan

PENYAJIAN

Bab ini mengkaji masalah pelabelan titik sampel yang selanjutnya disebut peubah acak. Penyajian diawali dengan percobaan berulang dengan dua pemunculan (Binomial atau Bernoulli), dilanjutkan menyusun distribusi peubah acak, menghitung nilai harapan dan menerapkannya dalam suatu permainan.

URAIAN MATERI

Percobaan Berulang atau Bebas

Percobaan berulang sebanyak berhingga kali telah dikaji pada ruang probabilitas hingga, misalkan percobaan pelemparan uang logam sebanyak tiga kali, pelemparan dadu sebanyak dua kali, dan lain-lain. Contoh-contoh kejadian percobaan berulang dirumuskan dalam definisi berikut.

Definisi

Misalkan S* merupakan ruang probabilitas hingga. Berdasarkan n percobaan bebas atau berulang, terbentuk ruang probabilitas S yang memuat unsur-unsur berbentuk pasangan terurut n obyek pada S*, yang memenuhi kemungkinan pasangan terurut n obyek tersebut sama dengan hasil kali peluang komponen-komponennya, yaitu

$$P((s_1, s_2, s_3, \dots, s_n)) = P(s_1).P(s_2).P(s_3).\dots.P(s_n)$$

<u>Contoh 1.</u>

Tiga kuda a, b, c berpacu dengan peluang menang masing-masing adalah $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, dan $\frac{1}{6}$. Jika kuda-kuda tersebut berpacu dua kali, maka tentukan peluang c memenangkan pacuan pertama dan a memenangkan pacuan kedua.

Jawab:

Misalkan S* = { a, b, c}, dengan P(a) = $\frac{1}{2}$, P(b) = $\frac{1}{3}$, dan P(c) = $\frac{1}{6}$.

Ruang sampel untuk kuda berpacu dua kali: S = { (a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c) } ➔ n(S) = 3 × 3 = 9

Peluang untuk masing-masing titik sampel adalah

P((a,a)) = P(a) × P(a) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

P((b,a)) = P(b) × P(a) = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

P((c,a)) = P(c) × P(a) = $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

P((a,b)) = P(a) × P(b) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

P((b,b)) = P(b) × P(b) = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

P((c,b)) = $\frac{1}{18}$

P((a,c)) = P(a) × P(c) = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

P((b,c)) = P(b) × P(c) = $\frac{1}{18}$

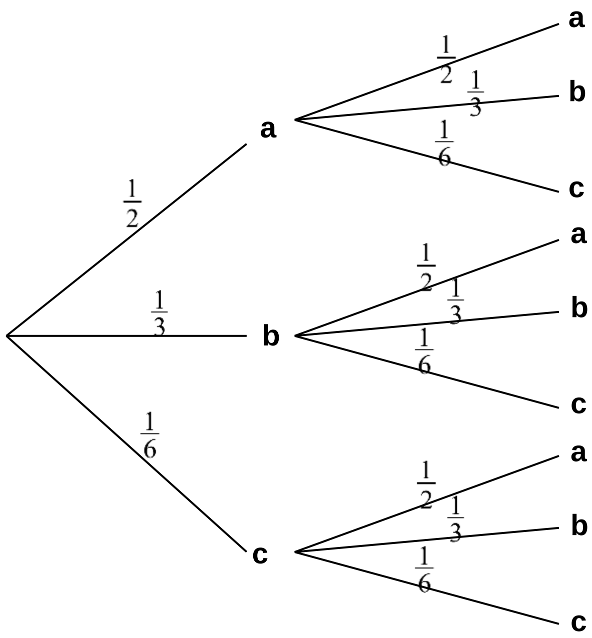
P((c,c)) = $\frac{1}{36}$

Jadi peluang *c* memenangkan pacuan pertama, dan *a* memenangkan pacuan kedua adalah $P((c,a)) = \frac{1}{12}$.

Masalah percobaan berulang merupakan proses stokastik. Oleh karenanya masalah ini dapat diselesaikan dengan menggambarkan diagram pohon yang mempunyai sifat-sifat:

(1) Setiap titik cabang mempunyai pemunculan yang sama banyaknya
(2) Peluang pada setiap cabang utama untuk pemunculan yang sama adalah sama

Dengan demikian masalah pacuan kuda diatas dapat digambarkan diagram pohonnya sebagai berikut



Perhatikan bahwa pada setiap titik cabang muncul a,b dan c dengan peluang yang sama, yaitu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, dan $\frac{1}{6}$.

Berdasarkan diagram pohon, peluang *c* memenangkan pacuan pertama, dan *a* pacuan kedua adalah $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$.

Percobaan Berulang dengan Dua Pemunculan (Percobaan Bernoulli)

Percobaan berulang dengan dua pemunculan sering disebut percobaan Bernoulli. Pemunculan-pemunculan pada percobaan berulang dengan dua pemunculan disebut sukses dan gagal. Misalkan p merupakan peluang sukses, maka $q = 1 - p$ merupakan peluang gagal. Dalam kajian masalah ini yang dipentingkan adalah banyaknya sukses, bukan urutannya.

Teorema

Peluang muncul tepat *k* sukses dari *n* percobaan berulang adalah

$$F(n, k, p) = C(n, k).\, p^k.\, q^{n-k}$$

Sedangkan peluang sedikitnya sekali sukses adalah $1 - q^n$

Catatan: $C(n, k)$ merupakan koefisien binomial

<u>*Contoh 2.*</u>

Sebuah koin dilempar sebanyak enam kali.

Tentukan peluang

(i) bagian angka tepat muncul dua kali

(ii) paling sedikit bagian angka muncul sebanyak 4 kali,

(iii) bagian angka muncul sedikitnya sekali

Jawab:

Misalkan muncul bagian angka adalah kejadian sukses.

Maka p = $\frac{1}{2}$ (peluang munculnya angka)

dan q = 1- $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ n(peluang munculnya gambar)

(i) muncul angka 2 kali, berarti k = 2. F(n, k, p) = F(6, 2, $\frac{1}{2}$)

$$= C(6,2) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = 15 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{15}{64}$$

(ii) muncul angka minimal 4 kali, berarti k = 4, 5, dan 6.

⇨ $F(6, 4, \frac{1}{2}) = C(6, 4) \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-4} = \frac{15}{64}$

⇨ $F(6, 5, \frac{1}{2}) = C(6, 5) \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-5} = \frac{6}{64}$

⇨ $F(6, 6, \frac{1}{2}) = C(6, 6) \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-6} = \frac{1}{64}$

Peluang muncul angka minimal 4 kali adalah $\frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{22}{64}$

(iii) Bagian angka muncul sedikitnya sekali berarti k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$F(6, 1, \frac{1}{2}) + F(6, 2, \frac{1}{2}) + F(6, 3, \frac{1}{2}) + F(6, 4, \frac{1}{2}) + F(6, 5, \frac{1}{2}) + F(6, 6, \frac{1}{2}) =$

Atau dengan cara:

Untuk k = 0 berarti angka tak muncul, merupakan komplemen bagian angka muncul sedikitnya sekali

jadi peluang bagian angka muncul sedikitnya sekali

$= 1 - F(6, 0, \frac{1}{2})$

$= 1 - C(6, 0) \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-0} = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

Atau dengan cara:

Jadi peluang bagian angka muncul sedikitnya sekali

$= 1 - q^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6$

$= 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

Distribusi Binomial

Jika n dan p diperlakukan sebagai konstanta, maka fungsi yang didefinisikan oleh

$f(n,k,p)$ disebut distribusi binomial karena untuk $k = 0,1,2,\dots,n$ berturut-turut bersesuaian dengan suku-suku perluasan binomial:

$$(q + p)^n = q^n + nC1\, q^{n-1}p + nC2\, q^{n-2}p^2 + \dots + nCn\text{-}1\, qp^{n-1} + p^n$$

$$= f(n,0,p) + f(n,1,p) + f(n,2,p) + \dots + f(n,n\text{-}1,p) + f(n,n,p)$$

$$(q+p)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)q^{n-k}p^k = \sum_{k=0}^{n} f(n,k,p)$$

Distribusi ini juga disebut distribusi Bernoulli karena percobaan bebas dengan dua pemunculan merupakan percobaan Bernoulli.

Peubah Acak

Sebelumnya, pemunculan dari percobaan (titik sampel) dari suatu ruang sampel belum secara khusus diberi label atau dinomori. Sekarang kita akan menomori titik sampel, cara seperti ini disebut *peubah acak*.

Definisi

Peubah acak X adalah fungsi dari suatu ruang sampel S ke bilangan riil. $X : S \rightarrow R_X$ dimana R_X merupakan ruang hasil atau jangkauan.

Keterangan: jika ruang sampel S tak terhitung, maka fungsi yang didefinisikan pada S bukan merupakan peubah acak. Akan tetapi apabila S berhingga, maka setiap fungsi yang didefinisikan pada ruang sampel S senantiasa merupakan peubah acak.

Ilustrasi 1.

Pada percobaan sepasang dadu dilempar, kita mempunyai ruang samplel S yang terdiri dari 36 pasangan terurut bilangan 1 sampai dengan 6.

S = { (1,1), (1,2), (1,3), …, (6,5), (6,6)} ➔ n(S) = 6 × 6 = 36

Misalkan X menunjukkan unsur-unsur di S berupa jumlah dua bilangan pada pasangan terurut. Maka R_X merupakan peubah acak dengan ruang hasil $R_X = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$.

Misalkan Y menunjukkan unsur-unsur di S berupa maksimum dari dua bilangan pada pasangan terurut. Maka R_Y merupakan peubah acak dengan ruang hasil $R_Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$.

Distribusi Peubah Acak

Misalkan $R_X = \{ x_1, x_2, x_3, \dots, x_r \}$ merupakan ruang hasil dari peubah acak X yang didefinisikan pada ruang sampel S. Misalkan $p_i = P(x_i)$ merupakan jumlah peluang unsur-unsur di S yang prapetanya x_i, maka kita mempunyai fungsi pengaitan p_i ke x_i atau pasangan terurut $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_r, p_r)$ yang biasa dituliskan dalam bentuk tabel ***distribusi peubah acak X*** sebagai berikut:

$\boldsymbol{x_i}$	x_1	x_2	$\cdots$	x_r
$\boldsymbol{p_i}$	p_1	p_2	$\cdots$	p_r

Teorema

Misalkan S ruang lengkap, $R_X = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r \}$ merupakan ruang hasil peubah acak X yang didefinisikan pada S, maka

$$p_i = P(x_i) = \frac{\text{banyaknya unsur di S yang prapetanya } x_i}{\text{banyaknya unsur di S}}$$

<u>*Contoh 3.*</u>

Dua buah dadu dilempar bersamaan. Misalkan S merupakan ruang sampel yang berupa pasangan terurut dari dua bilangan mata dadu yang muncul, X merupakan peubah acak yang menunjukkan jumlah dua bilangan yang muncul. Tentukan distribusi dari peubah acak X.

Jawab:

$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), \ldots, (6,5), (6,6)\}$

$R_X = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 \}$

Tabel R_X terhadap banyaknya unsur di S yang prapetanya x_i

R_X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Jumlah	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabel distribusi peubah acak X

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Contoh 4.

Dua buah dadu dilempar bersamaan. Misalkan S merupakan ruang sampel yang berupa pasangan terurut dari dua bilangan mata dadu yang muncul, Y merupakan peubah acak yang menunjukkan maksimum dari dua bilangan yang muncul. Tentukan distribusi dari peubah acak Y.

Jawab:

$S = \{ (1,1), (1,2), (1,3), \dots, (6,5), (6,6)\}$

$R_Y = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$

Tabel R_Y terhadap banyaknya unsur di S yang prapetanya y_i

R_Y	1	2	3	4	5	6
Jumlah	1	3	5	7	9	11

Tabel distribusi peubah acak Y

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$

Nilai Harapan

Jika pemunculan suatu percobaan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_r$ dengan nilai peluang $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ maka nilai harapan didefinisikan sebagai

$$E = x_1.p_1 + x_2.p_2 + x_3.p_3 + \dots + x_r.p_r$$

Dalam hal x_i dan p_i berasal dari distribusi peubah acak, nilai harapannya disebut nilai harapan peubah acak, dituliskan sebagai $E(X)$.

Permainan

Dalam suatu permainan, nilai harapan E dipandang sebagai nilai permainan dari pemain. Permainan dikatakan menguntungkan pemain, jika E positif dan tidak menguntungkan jika E negatif, dan permainan dikatakan adil apabila $E = 0$.

Contoh 5.

Seorang pemain melempar sebuah dadu. Jika yang muncul bilangan prima, maka ia memenangkan sejumlah dolar sesuai bilangan yang muncul. Namun bila yang muncul selain prima, maka ia membayar sejumlah dollar sesuai bilangan yang muncul. Apakah permainan ini menguntungkan bagi pemain ?

Jawab:

Hasil yang mungkin dari permainan beserta probabilitasnya sebagai berikut:

x_i	2	3	5	-1	-4	-6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Tanda negatif pada -1, -4, dan -6 berdasarkan kenyatakan bahwa pemain tidak diuntungkan, yaitu bilangan yang muncul bukan prima. Nilai harapan permainan tersebut adalah

$$E = 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{6} - 4 \cdot \frac{1}{6} - 6 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

Karena nilai harapannya negatif maka permainan ini tidak menguntungkan bagi pemain.

Soal Latihan

1. Sebuah kartu diambil kemudian dikembalikan hingga tiga kali dari seperangkat kartu bridge. Tentukan peluang terambilnya
   a. Tiga hati
   b. Dua hati
   c. Paling sedikit satu hati
2. Sebuah kotak berisi 3 kelereng merah dan 2 kelereng putih. Sebuah kelereng diambil dan kemudian dikembalikan hingga tiga kali. Tentukan peluang terambilnya
   a. Satu kelerang merah
   b. Dua kelereng merah
   c. Paling sedikit satu kelereng merah
3. Sebuah kartu diambil dan dikembalikan dari seperangkat kartu bridge secara berulang kali. Berapa kali kartu harus diambil agar
   a. Ada paling sedikit berpeluang sama dengan pada pengambilan sebuah hati
   b. Peluang pengambilan sebuah hati lebih besar dari $\frac{3}{4}$
4. Peluang tembakan seseorang mengenai sasaran adalah $\frac{1}{3}$.
   a. Jika ia menembak 5 kali, berapakah peluang paling sedikit tembakannya mengenai sasaran?
   b. Berapa kali ia harus menembak agar peluang tembakannya mengenai sasaran paling sedikit 90% untuk setiap saat?
5. Tiga orang ibu akan melahirkan bayi tunggal. Peluang setiap ibu untuk melahirkan bayi perempuan atau bayi laki-laki adalah sama. Berapakah peluang semua bayi yang dilahirkan laki-laki?

6. Peluang sebuah komponen dapat lolos uji tertentu adalah 2/3 dan mengikuti distribusi binomial. Berapakah peluang bahwa 3 dari 6 komponen yang diuji berikutnya lolos uji ?
7. Sebuah dadu dilemparkan ke atas sebanyak 4 kali. Tentukan peluang dari:
   a. Mata dadu 5 muncul 1 kali
   b. Mata dadu genap muncul 2 kali
   c. Mata dadu 2 atau 6 muncul sebanyak 4 kali
8. Terdapat 10 buah bola lampu. Ternyata setelah diperiksa 5% diantaranya rusak. Berapakah peluang:
   a. Dua rusak
   b. Tidak ada yang rusak
9. Ujian matematika menggunakan pilihan berganda. Setiap soal ada empat pilihan dan hanya satu jawaban yang benar untuk setiap soal. Selanjutnya, antarnomor soal diasumsikan saling bebas. Amir mengikuti ujian matematika tersebut, dan terdapat 10 soal yang harus dijawab.
   a. Berapa peluang dia menjawab benar 5 soal?
   b. Berapa peluang dia menjawab soal minimal 3 yang benar?
   c. Berapa peluang dia menjawab antara 7 sampai 9 nomer yang benar?
10. Sebanyak 5 mahasiswa akan mengikuti ujian dan diperkirakan peluang lulusnya adalah 0,7 untuk setiap mahasiswa. Hitunglah peluang:
    a. Paling banyak 2 orang lulus
    b. Yang akan lulus antara 2 sampai 3 orang
    c. Paling sedikit 4 diantaranya lulus.

11. Peluang seorang siswa lulus ujian adalah 0,2.
    a. Jika 10 orang siswa mengikuti ujian, berapakah peluang bahwa setidaknya dua siswa lulus ujian?
    b. Berapa banyak siswa yang harus mengikuti ujian agar peluang minimal seorang siswa akan lulus ujian paling sedikit 0,99?
12. Lima koin dilempar bersamaan. Misalkan X adalah peubah acak yang menunjukkan rangkaian terpanjang munculnya bagian angka, tentukanlah distribusi dan harapan X.
13. Sebuah koin dilempar 4 kali. Misalkan X adalah peubah acak yang menunjukkan rangkaian terpanjang munculnya bagian angka, tentukanlah distribusi dan harapan X.
14. Pada soal no. 6. Untuk kasus koin tidak seimbang dengan P(A) = $\frac{2}{3}$ dan P(T) = $\frac{1}{3}$.
15. Seseorang berdiri di titik asal, kemudian melempar koin. Jika muncul angka ia berpindah satu satuan ke kanan, tetapi jika yang muncul gambar ia berpindah ke kiri satu satuan.
    a. Jika X peubah acak yang menunjukkan jarak dari titik asal setelah 4 kali lemparan, tentukanlah distribusi dan harapan X.
    b. Jika Y adalah peubah acak yang menunjukkan posisinya setelah 4 kali lemparan, tentukanlah distribusi dan harapan Y.
16. Seperti soal no. 8. Untuk kasus melempar koin sebanyak 5 kali
17. Dua kartu dipilih dari sebuah kotak yang berisi lima kartu yang diberi angka 1, 1, 2, 2, dan 3.

a. Jika X peubah acak yang menunjukkan jumlah dua angka, tentukanlah distribusi dan harapan X.
b. Jika Y peubah acak yang menunjukkan maksimum dari dua angka, tentukan distribusi dan harapan Y.

18. Dua kartu diambil secara acak dari sebuah kotak yang berisi lima kartu yang diberi angka 1, 2, 3, 4, dan 5.
    a. Jika X peubah acak yang menunjukkan jumlah dua angka, tentukanlah distribusi dan harapan X.
    b. Jika Y peubah acak yang menunjukkan maksimum dari dua angka, tentukan distribusi dan harapan Y.
19. Dua buah dadu dilempar bersamaan. Misalkan S merupakan ruang sampel yang berupa pasangan terurut dari dua bilangan mata dadu yang muncul.
    a. Jika X merupakan peubah acak yang menunjukkan selisih dua bilangan yang muncul. Tentukan distribusi dari peubah acak X.
    b. Jika Y merupakan peubah acak yang menunjukkan kuadrat dari selisih dua bilangan yang muncul. Tentukan distribusi dari peubah acak Y.
20. Suatu pengiriman 9 unit komputer yang bertipe sama dari suatu toko elektronik berisi 3 buah unit yang rusak. Suatu kantot membeli 4 buah unit komputer tersebut secara acak dari kelompok tadi. Bila X merupakan peubah acak yang menyatakan banyaknya komputer yang rusak yang dibeli oleh perusahann, tentukan distribusi dan harapan X.
21. Syntha mengikuti kuis Teori Peluang. Kuis ini terdiri dari 10 pertanyaan, 4 soal yang pertama adalah soal Benar-Salah dan 6

soal yang terakhir adalah pertanyaan pilihan ganda dengan masing-masing 4 pilihan jawaban, hanya satu yang benar. Syntha tidak belajar untuk kuis, jadi dia hanya menebak secara mandiri setiap pertanyaan yang ada. Berapakah peluang dia menjawab tepat 2 pertanyaan dengan benar?

22. Seorang pemain melempar 3 koin. Ia menang \$5 jika muncul angka sebanyak 3 koin, \$3 jika muncul angka sebanyak 2 koin, dan \$1 jika muncul angka hanya 1 koin. Di lain pihak, ia kalah \$15 jika muncul gambar sebanyak 3 koin. Tentukan nilai permainan dari pemain tersebut.
23. Seorang pemain melempar sebuah koin sebanyak tiga kali. Ia menang \$8 jika muncul angka tiga kali, \$3 jika muncul angka 2 kali, dan \$1 jika muncul angka sekali saja. Di lain pihak, ia kalah apabila tidak muncul angka. Jika permainan ini adil, maka berapa ia harus membayar apabila kalah ?
24. Sean dan Colin sedang memainkan permainan yang melibatkan melempar dua dadu yang adil. Sean menang \$9 jika kedua mata dadunya genap dan ia harus membayar \$7 jika salah satu mata dadu yang muncul adalah lima. Tentukan nilai dari permainan tersebut dan apakah permainan tersebut menguntungkan bagi Sean? Jelaskan jawabanmu!
25. Sebuah kotak berisi 8 benda dimana 2 diantaranya rusak. Seseorang mengambil 3 benda dari kota tersebut. Tentukan harapan banyaknya benda rusak yang diambil.
26. Sebuah koin tidak seimbang dengan P(A) = $\frac{1}{3}$ dan P(G) = $\frac{2}{3}$ dilempar hingga muncul angka sekali atau gambar sekali. Tentukan harapan dari pelemparan koin tersebut.

27. Sebuah kotak berisi 10 bohlam lampu dengan 2 diantaranya rusak. Sebuah bohlam lampu diambil, kemudian dicek. Kegiatan ini dilakukan sampai ditemukan sebuah bohlam lampu yang tidak rusak. Tentukan harapan banyaknya bohlam yang terambil.

BAB 6
PEMECAHAN MASALAH TEORI PELUANG

KEMAMPUAN AKHIR

Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah teori peluang yang muncul dalam kompetisi matematika tingkat kabupaten, propinsi, nasional, dan internasional.

CAPAIAN PEMBELAJARAN

1. Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah peluang menggunakan teorema-teorema teori peluang.
2. Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah permutasi dan kombinasi menggunakan teorema-teorema permutasi dan kombinasi.

PENYAJIAN

Bab ini menyajikan masalah-masalah yang berkaitan dengan permutasi, kombinasi, peluang, peluang bersyarat, dan peubah acak. Beberapa masalah telah diselesaikan sebagai model strategi pemecahan masalah tak rutin. Sedang masalah-masalah yang belum diselesaikan dijadikan latihan untuk pengayaan materi dan masalah teori peluang mahasiswa.

URAIAN MATERI

Masalah Peluang dan Pemecahannya

Masalah 1

Diketahui suatu kelas terdiri dari 15 siswa. Semua siswa tersebut akan dikelompokkan menjadi 4 kelompok yang terdiri dari 4, 4, 4, dan 3 siswa. Ada berapa cara pengelompokkan tersebut?

Jawab:

Misalkam kelompok yang terbentuk adalah kelompok A, B, C, dan D dengan kelompok A, B, dan C beranggotakan 4 siswa, sedangkan kelompok D beranggotakan 3 siswa.

Maka:

- banyaknya cara membentuk kelompok A ada C_4^{15}
- banyaknya cara membentuk kelompok A ada C_4^{11}
- banyaknya cara membentuk kelompok A ada C_4^{17}
- banyaknya cara membentuk kelompok A ada C_3^{3}

Tetapi setiap kasus dihitung 3! = 6, sehingga jawabannya adalah

$$\frac{C_4^{15} \times C_4^{11} \times C_4^{7} \times C_3^{3}}{3!} = \frac{15!}{4!\,4!\,4!\,3!\,3!}$$

$$= 15 \times 7 \times 13 \times 11 \times 5 \times 7 \times 5 = 2.627.625$$

(Karena tidak boleh menggunakan alat hitung, jawaban dalam bentuk kombinasi saja)

<u>*Masalah 2*</u>

Suatu set soal tertdiri dari 10 soal pilihan B atau S dan 15 soal pilihan ganda dengan 4 pilihan. Seorang siswa menjawab semua soal dengan menebak jawaban secara acak. Tentukan probabilitas ia menjawab dengan benar hanya 2 soal.

Jawab:

Peluang jawaban benar atau salah pada soal pilihan B atau S adalah sama, yaitu $\frac{1}{2}$

Peluang jawaban benar pada soal pilihan ganda adalah $\frac{1}{4}$

Peluang jawaban salah pada soal pilihan ganda adalah $\frac{34}{4}$

Terdapat tiga kemungkinan jawabannya benar 2, yaitu:

- Kemungkinan I: 2 jawaban benar keduanya pada soal pilihan B atau S

  Peluangnya adalah $C_2^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$

- Kemungkinan II: 2 jawaban benar keduanya pada soal pilihan ganda

  Peluangnya adalah $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times C_2^{15} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{13}$

- Kemungkinan III: 2 jawaban benar, satu pada soal pilihan B atauS dan satu pada soal pilihan ganda.

  Peluangnya adalah $C_1^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times C_1^{15} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{14}$

Jadi secara keseluruhan, peluang menjawab benar tepat 2 soal adalah:

$$C_2^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{15} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times C_2^{15} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{13} +$$

$$C_1^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \times C_1^{15} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{1} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{14}$$

Masalah 3

Suatu dadu ditos enam kali. Tentukan probabilitas jumlah mata dadu yang muncul 27.

Jawab:

Permasalahan ini sama saja dengan menyelesaikan persamaan:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_5 = 27, \text{dengan } 1 \leq x_i \leq 6, \text{untuk } i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

Hal ini ekivalen dengan mencari koefisien dari x^{27} dari $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6$

Dan

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$$
$$= x\big(1 + x + x^2 + x^3(1 + x + x^2)\big) = x(1 + x + x^2)(1 + x^3)$$

Sehingga

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6 = x^6(1 + x + x^2)^6(1 + x^3)^6$$

Dengan Binom Newton didapat

$$(1 + x^3)^6 = \sum_{i=0}^{6} x^{3i}$$

Dan $(1 + x + x^2)^6 = \sum_{i=0}^{6}(x^2)^{6-i}(x + 1)^i = \sum_{i=0}^{6} x^{12-2i}\left(\sum_{j=0}^{i} x^j\right) = \sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{i} x^{12-2i+j}$

Oleh karena itu didapatkan

- Koefisien x^9 dari $(1 + x^3)^6$ adalah 20
- Koefisien x^{12} dari $(1 + x^3)^6$ adalah 15

- Koefisien x^{15} dari $(1 + x^3)^6$ adalah 6
- Koefisien x^{18} dari $(1 + x^3)^6$ adalah 1
- Koefisien x^{12} dari $(1 + x + x^2)^6$ adalah 1
- Koefisien x^9 dari $(1 + x + x^2)^6$ adalah 50
- Koefisien x^6 dari $(1 + x + x^2)^6$ adalah 141
- Koefisien x^3 dari $(1 + x + x^2)^6$ adalah 50

Jadi koefisien dari x^{27} dari $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6 = x^6(1 + x + x^2)^6(1 + x^3)^6$ adalah

$(20 \times 1) + (15 \times 50) + (6 \times 141) + (1 \times 50) = 1666$

Jadi peluang diperoleh jumlah mata dadu yang muncul sama dengan 27 adalah $\frac{1666}{6^6}$

Atau dengan cara mendaftar semua kemungkinan (kasus) sebagai berikut:

Kasus							Banyaknya Cara
1	6	6	6	6	2	1	$\frac{6!}{4!} = 30$
2	6	6	6	5	3	1	$\frac{6!}{3!} = 120$
3	6	6	6	5	2	2	$\frac{6!}{3!2!} = 60$
4	6	6	6	4	4	1	$\frac{6!}{3!2!} = 60$
5	6	6	6	4	3	2	$\frac{6!}{3!} = 120$
6	6	6	6	3	3	3	$\frac{6!}{3!3!} = 20$
7	6	6	5	5	4	1	$\frac{6!}{2!2!} = 180$

Kasus							Banyaknya Cara
8	6	6	5	5	3	2	$\frac{6!}{2!2!} = 180$
9	6	6	5	4	4	2	$\frac{6!}{2!2!} = 180$
10	6	6	5	4	3	3	$\frac{6!}{2!2!} = 180$
11	6	6	4	4	4	3	$\frac{6!}{3!2!} = 60$
12	6	5	5	5	5	1	$\frac{6!}{4!} = 30$
13	6	5	5	5	4	2	$\frac{6!}{3!} = 120$
14	6	5	5	5	3	3	$\frac{6!}{3!2!} = 60$
15	6	5	5	4	4	3	$\frac{6!}{2!2!} = 180$
16	6	5	4	4	4	4	$\frac{6!}{4!} = 30$
17	5	5	5	5	5	2	$\frac{6!}{5!} = 6$
18	5	5	5	5	4	3	$\frac{6!}{4!} = 30$
19	5	5	5	4	4	4	$\frac{6!}{3!3!} = 20$

Jadi semua ada 1666 cara, akibatnya peluang diperoleh jumlah mata dadu yang muncul sama dengan 27 adalah $\frac{1666}{6^6}$.

Masalah 4

Misalkan terdapat 5 kartu di mana setiap kartu diberi nomor yang berbeda yaitu 2, 3, 4, 5, 6. Kartu-kartu tersebut kemudian dijajarkan dari kiri ke kanan secara acak sehingga berbentuk barisan. Berapa probabilitas bahwa banyaknya kartu yang dijajarkan dari kiri ke kanan dan ditempatkan pada tempat ke-i akan lebih besar atau sama dengan i untuk setiap i dengan $1 \leq i \leq 5$.

Jawab:

Kemungkinan semua susunan adalah 5!.

Susunan yang paling sederhana yang memenuhi syarat soal adalah 2, 3, 4, 5, 6.

$$\boxed{2} \quad \boxed{3} \quad \boxed{4} \quad \boxed{5} \quad \boxed{6}$$

Agar memenuhi syarat dari soal, maka

- Angka 2 bisa menenpati posisi ke-1 dan ke-2
- Angka 3 bisa menenpati posisi ke-1, ke-2 dan ke-3
- Angka 4 bisa menenpati posisi ke-1, ke-2, ke-3 dan ke-4
- Angka 5 bisa menenpati posisi ke-1, ke-2, ke-3, ke-4 dan ke-5
- Angka 6 bisa menenpati posisi ke-1, ke-2, ke-3, ke-4 dan ke-5

Sehingga masing-masing angka 2, 3, 4, dan 5 hanya bisa digeser ke kanan satu langkah saja.

Cara ini ada sebanyak $2^4 = 16$.

Sedangkan untuk kemungkinan angka digeser ke kiri tidak perlu diperhatikan, karena jika kita menggeser ke kiri maka pasti ada angka yang harus digeser ke kanan sehingga sudah masuk dalam perhitungan yang pertama tadi

Lihat penjabaran berikut dengan gambar. Pada masing-masing gambar, kedua tempat kosong dapat ditempati oleh angka 5 dan angka 6 dengan 2 cara, sehingga ada 16 cara.

Akibatnya besar probabilitas yang ditanyakan adalah $\frac{16}{5!} = \frac{2}{15}$

2	3	4		
2	3		4	
2		3	4	
2	4	3		

3	2	4		
3	2		4	
	2	3	4	
4	2	3		

<u>*Masalah 5*</u>

Terdapat tiga meja bundar yang identic. Setiap meja harus dapat ditempati minimal satu siswa. Banyaknya cara mendudukkan enam siswa pada meja-meja tersebut adalah ….

Jawab:

Ada tiga kemungkinan pengaturan kursi untuk ketiga meja tersebut, sebab

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + 1 + 4 \\ &= 1 + 2 + 3 \\ &= 2 + 2 + 2 \end{aligned}$$

- Kemungkinan I: 1 kursi , 1 kursi, 4 kursi

  Banyaknya cara duduk ada

  $$\frac{C_1^6 \times C_1^5 \times C_4^4 \times 3!}{2!} = 90$$

- Kemungkinan II: 1 kursi , 2 kursi, 3 kursi

  Banyaknya cara duduk ada $C_1^6 \times C_2^5 \times C_3^3 \times 2! = 120$

- Kemungkinan III: 2 kursi , 2 kursi, 2 kursi

  $$\frac{C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2}{3!} = 15$$

Jadi total cara mendudukkan keenam siswa tersebut ada 90 + 120 + 15 = 225 cara.

Masalah 6

Suatu perusahaan permen memproduksi empat macam rasa permen. Permen dijual dalam bungkus, setiap bungkus berisi 10 permen dengan setiap rasa permen ada dalam bungkus. Banyaknya macam variasi isi bungkusan permen adalah ….

Jawab:

Misalkan x_i menyataknan banyaknya permen rasa ke-i yang ada dalam bungkusan.

Permasalahan di atas samadengan mencari solusi persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10, \text{ dengan } x_i \geq 1$$

Sehingga solusinya ada $\frac{9!}{6!3!} = 84$

Masalah 7

Ada sebanyak 6 permutasi dari huruf-huruf OSNMAT. Jika semua permutasi tersebut diurutkan secara abjad dari A sampai Z, maka OSNMAT pada urutan ke ….

Jawab:

Urutan secara alphabet dari OSNMAT adalah A, M, N, O, S, T.

Sehingga

- Susunan huruf yang diawali dengan huruf A ada sebanyak 5! = 120
- Susunan huruf yang diawali dengan huruf M ada sebanyak 5! = 120
- Susunan huruf yang diawali dengan huruf N ada sebanyak 5! = 120

- Susunan huruf yang diawali dengan dua huruf OA ada sebanyak $4! = 24$
- Susunan huruf yang diawali dengan dua huruf OM ada sebanyak $4! = 24$
- Susunan huruf yang diawali dengan dua huruf ON ada sebanyak $4! = 24$
- Susunan huruf yang diawali dengan tiga huruf OSA ada sebanyak $3! = 6$
- Susunan huruf yang diawali dengan tiga huruf OSM ada sebanyak $3! = 6$
- Susunan huruf yang diawali dengan empat huruf OSNA ada sebanyak $2! = 2$
- Susunan huruf yang diawali dengan empat huruf OSNM yang pertama adalah OSNMAT

Jadi OSNMAT merupakan susunan huruf yang ke $120 + 120 + 120 + 24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 1 = 447$

Masalah 8

Rudi membuat bilangan asli dua digit. Probabilitas bahwa kedua digit bilangan tersebut merupakan bilangan prima dan bilangan tersebut bersisa 3 jika dibagi 7 adalah ….

Jawab:

Ada $9 \times 10 = 90$ bilangan dua digit.

Misalkan bilangan tersebut adalah AB, maka

(i) A dan B prima, yaitu $A, B \in \{2, 3, 5, 7\}$

(ii) $10A + B \equiv 3 \pmod 7$ ➔ $3A + B \equiv 3 \pmod 7$ ➔ $3A + B - 3$ habis dibagi 7

Dari kedua syarat tersebut, kita bisa bagi kasus untuk A:

- Jika $A = 2$, maka $B = 4$ (bukan bilangan prima)
- Jika $A = 3$, maka $B = 1$ (bukan bilangan prima)
- Jika $A = 5$, maka $B = 2$ (bilangan prima)
- Jika $A = 7$, maka $B = 3$ (bilangan prima)

Jadi ada dua bilangan yang memenuhi syarat, yaitu 52 dan 73.

Sehingga peluangnya adalah $\frac{2}{90} = \frac{1}{45}$

Masalah 9

Anak laki-laki dan anak perempuan yang berjumlah 48 orang duduk melingkar secara acak. Banyaknya minimum anak perempuan sehingga pasti ada enam anak perempuan yang duduk berdekatan tanpa diselingi laki-laki adalah ….

Jawab:

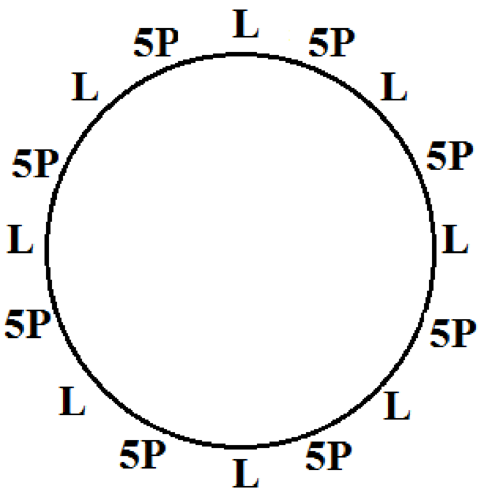
Misalkan banyaknya anak laki-laki adalah n.

Misalkan tempat duduk diantara dua laki-laki berdekatan disebut ruang.

Maka banyaknya ruang sama dengan n.

- Jika $n \geq 8$, maka banyaknya ruang paling sedikit ada 8 dan banyaknya anak perempuan paling banyak ada 40.

  Ke-40 anak perempuan dapat diatur ke dalam ruang-ruang sehingga tiap ruang maksimal ada 5 anak perempuan.



- Jika n = 7, maka maka banyaknya ruang ada 7 dan banyaknya anak perempuan ada 41.

  Sehingga berdasarkan Prinsip Sarang Burung, pasti ada minimal satu ruang yang ditempati oleh 6 atau lebih anak perempuan.

Jadi banyaknya anak perempuan paling sedikit ada 41.

Masalah 10

Pada suatu kota ada sekumpulan bola berwarna merah dan hitam yang secara keseluruhannya kurang dari 1000 bola. Misalkan diambil dua bola. Peluang terambilnya dua bola merah adalah p dan peluang terambilnya bola hitam adalah q dengan $p - q = \frac{23}{37}$. Selisih terbesar yang mungkin dari banyaknya bola merah dan hitam adalah ….

Jawab:

Misalkan

m = banyaknya bola berwarna merah

h = banyaknya bola berwarna hitam

Maka

$p = \frac{\binom{m}{2}}{\binom{m+h}{2}}$ dan $q = \frac{\binom{h}{2}}{\binom{m+h}{2}}$

Dan karena $p - q = \frac{23}{37}$, maka

$$\frac{\binom{m}{2}}{\binom{m+h}{2}} - \frac{\binom{h}{2}}{\binom{m+h}{2}} = \frac{23}{37}$$

$$\frac{m(m-1) - h(h-1)}{(m+h)(m+h-1)} = \frac{23}{37}$$

$$\frac{m^2 - h^2 - (m-h)}{(m+h)(m+h-1)} = \frac{23}{37}$$

$$\frac{(m+h)(m-h) - (m-h)}{(m+h)(m+h-1)} = \frac{23}{37}$$

$$\frac{(m+h-1)(m-h)}{(m+h)(m+h-1)} = \frac{23}{37}$$

$$\frac{(m-h)}{(m+h)} = \frac{23}{37}$$

$37(m - h) = 23(m + h)$

$14m = 60h$

$7m = 30h$

Akibatnya $m = 30k$ dan $h = 7k$ untuk suatu bilangan asli k.

Dan karena $m + h = 30k + 7k = 37k < 1000$, maka $k \leq 37$.

Sehinggga $m - h = 30k - 7k = 23k \leq 23 \times 27 = 621$.

Jadi selisih terbesar yang mungkin dari banyaknya bola merah dan hitam adalah 621, yaitu untuk banyaknya bola merah $30 \times 27 = 810$ dan banyaknya bola hitam $7 \times 27 = 189$.

Masalah 11

Terdapat enam anak, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, dan *F* akan saling bertukar kado. Tidak ada yang menerima kadonya sendiri, dan kado dari *A* diberikan kepada *B*. Banyaknya cara membagikan kado dengan cara demikian adalah ….

Jawab:

Ingat teorema berikut ini.

Teorema Kado Silang (*Derangement*):

Jika terdapat *n* orang yang akan saling tukar kado dan tidak boleh ada orang yang mengambil kado yang dia bawa sendiri, maka banyaknya cara berbeda melakukan pertukaran kado ini adalah

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Jika diabaikan terlebih dahulu syarat kado *A* diberikan kepada *B*, maka banyaknya cara membagi kado ada

$$\begin{aligned} D_6 &= 6!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) \\ &= 6! - 6! + 6 \times 5 \times 4 \times 3 - 6 \times 5 \times 4 + 6 \times 5 - 6 + 1 \\ &= 265 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa banyaknya cara dengan syarat kado *A* diberikan kepada *B* atau *C* atau *D* atau *E* atau *F* adalah sama. Sehingga banyaknya cara tukar kado dengan syarat kado dari *A* diberikan kepada *B* adalah $\frac{265}{5} = 53$ cara.

Masalah 12

Kode kupon hadiah untuk belanja pada suatu toko swalayan berbentuk bilangan yang disusun dari angka 1, 2, 2, 3, 4. Jika kupon-kupon tersebut disusun berdasarkan kodenya mulai dari yang terkecil sampai dengan yang terbesar, maka tentukan urutan kupon dengan kode 32124.

Jawab:

Dari angka 1, 2, 2, 3, 4 akan disusun sebuah nomor yang berurutan dari terkecil sampai yang terbesar. Dimulai dari yang terkecil; Jika angka 1 di depan, angka berikutnya 2, 2, 3, 4, banyak kemungkinan susunan adalah memakai permutasi jika ada unsur yang sama.

$$P_{p,q,r}^{n} = \frac{n!}{p! \cdot q! \cdot r!}$$

$$P_{2,1,1}^{4} = \frac{4!}{2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{24}{2} = 12$$

Jika angka 2 di depan, angka berikutnya 1, 2, 3, 4 banyak kemungkinan susunan adalah memakai permutasi tidak ada unsur yang sama.

$$P_{r}^{n} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_{4}^{4} = \frac{4!}{(4-4)!} = 24$$

Jika angka 31 di depan, angka berikutnya 2, 2, 4, banyak kemungkinan susunan adalah memakai permutasi jika ada unsur yang sama.

$$P_{2,1}^{3} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$$

Jika angka 32 di depan, maka angka berikutnya adalah 1, 2 dan 4.

Kita sudah sampai pada susunan 32124, yang berada pada urutan ke-12+24+3+1=40

Jadi kupon 32124 terletak pada pada urutan 40.

<u>*Masalah 13*</u> *(OMITS 2012)*

Pada suatu permainan, STIMO meminta anda untuk memikirkan sebuah bilangan tiga digit ITS, dimana I, T dan S adalah digit-digit basis 10. Kemudian STIMO meminta anda untuk memikirkan bilangan baru dengan bentuk IST, TSI, TIS, STI dan SIT kemudian menjumlahkannya. Jika kelima bilangan baru berjumlah 3194 dan STIMO dapat menebak bilangan yang anda pikirkan di awal tadi, Berapakah bilangan ITS itu?

Jawab :

Sebuah bilangan yang terdiri dari 3 digit (masing-masing berbeda) kalau digitnya dipermutasikan akan berupa 6 bilangan yang masing-masing juga berupa bilangan 3 digit pula.

Dan jumlah hasil permutasi tadi adalah 222 kali dari jumlah salah satu bilangan yang dipermutasikan.

Misalkan bilangan itu I, T dan S dan hasil permutasinya ITS, IST, SIT, STI, TIS dan TSI

maka

ITS = 100I + 10 T + S

IST = 100I + 10 S + T

SIT = 100S + 10 I + T

STI = 100S + 10 T + I

TIS = 100T + 10 I + S

TSI = 100T + 10 S + I

Hasil penjumlahannya adalah sebagai berikut.

ITS+IST+SIT+STI+TIS+TSI

= 100 (2I + 2T + 2S) + 10 (2I + 2T + 2S) + (2I + 2T + 2S)

= 200 (I+T+S) + 20 (I+T+S) + 2 (I+T+S)

= 222 (I+T+S)

Pada soal terdapat fakta

222 (I+T+S) – ITS = 3194

Karena ITS dengan I≠T≠S maka dapat dipastikan ITS adalah bilangan genap. Untuk jumlah digit ITS karena ketiganya berbeda nilai paling tinggi adalah 24 (dengan memisalkan I = 7, T = 8 dan S = 9) dan paling rendah bernilai 6

Dengan cara coba-coba kita akan tertuju pada jawaban yang diinginkan. Misal

- 222 × 24 = 5328 ——> tentunya bilangan ini terlalu besar
- 222 × 23 = 5106 ——> masih terlalu besar
- 222 × 22 = 4884
- 222 × 21 = 4662
- 222 × 20 = 4440
- 222 × 19 = 4218
- 222 × 18 = 3996
- 222 ×17 = 3774
- 222 × 16 = 3552 ————————————> mungkin
- 222 × 15 = 3330 ——> mulai mengecil
- 222 × 14 = 3108 ——> tidak mungkin

Ambil 3552, dengan mengambil bilangan bebas yang terdiri 3 digit berbeda dimungkinkan akan ketemu jawabannya

Andai ITS = 358 (jumlahnya = 16)

222 (3+5+8) – 358 = 3194

Jadi bilangan yang kita pikirkan tadi adalah 358.

Masalah 14

Dalam sebuah tes jawaban Benar-Salah yang terdiri dari 20 soal. Tentukan peluang Aziz menjawab dengan benar tepat 80%.

Jawab:

Banyaknya soal dengan jawaban benar= 80% $\times$ 20 soal= 16 soal

Peluang untuk menjawab benar adalah $\frac{1}{2}$ dan

Peluang untuk menjawab salah adalah 1 $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Sehingga:

$$P(Y = 16) = \binom{20}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = 0{,}0046$$

dimana Y = banyaknya jawaban benar

Masalah 15

Dalam sebuah tes terdiri dari 20 soal pilihan ganda dengan 4 pilihan jawaban. Dimana masing-masing soal tepat dijawab secara acak dan tepat memiliki 1 jawaban benar. Tentukan peluang Aziz menjawab dengan benar tepat 80%.

Jawab:

Banyaknya soal dengan jawaban benar= 80% . 20 soal= 16 soal

Peluang untuk menjawab benar adalah $\frac{1}{4}$ dan

Peluang untuk menjawab salah adalah $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Sehingga:

$$P(Y = 16) = \binom{20}{16} \left(\frac{1}{4}\right)^{16} \left(\frac{3}{4}\right)^{4} = 0{,}00000036$$

dimana Y = banyaknya jawaban benar

Masalah Teori Peluang dalam Kompetisi Matematika

A. Soal Tipe Pilihan Ganda

1. Misalkan $S = \{21, 22, 23, \dots, 30\}$. Jika empat anggota S diambil secara acak, maka peluang terambilnya empat bilangan yang berjumlah genap adalah ….
   A. $\frac{2}{5}$
   B. $\frac{1}{2}$
   C. $\frac{11}{21}$
   D. $\frac{2}{3}$

2. Suatu percobaan dilakukan dengan ketentuan sebagai berikut:
   i. Pertama kali dilakukan pelemparan sekeping mata uang.
   ii. Jika dalam pelemparan mata uang muncul sisi gambar, percobaan dilanjutkan dengan pelemparan mata uang. Sedangkan jika muncul sisi angka, percobaan dilanjutkan dengan sebuah dadu bersisi enam.
   iii. Jika sampai dengan pelemparan mata uang ketiga kalinya selalu muncul gambar, percobaan dihentikan.
   iv. Jika dalam pelemparan dadu muncul angka genap, pelemparan dihentikan.
   v. Jika dalam pelemparan dadu muncul angka ganjil, pelemparan diulang sekali dan selanjutnya pelemparan dihentikan apapun angka yang muncul.

Peluang bahwa dalam percobaan tersebut tidak pernah terjadi pelemparan dadu adalah ….

A. 1

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{16}$

D. $\frac{1}{64}$

3. Suatu sekolah mengikutsertakan 3 siwa laki-laki dan 2 siswa perempuan dalam seleksi OSN tingkat kabupaten/kota. Diberikan 3 soal pilihan benar-salah. Peluang bahwa tidak ada satupun siswa laki-laki yang menjawab semua soal dengan benar, sedangkan ada satu siswa perempuan yang menjawab semua soal dengan benar adalah …

A. $\frac{7^3}{8^3}$

B. $\frac{15\times 7^3}{8^5}$

C. $\frac{14\times 7^3}{8^5}$

D. $\frac{17^3+14}{8^5}$

4. Pada pemilihan calon ketua kelas yang diikuti oleh 5 kontestan, diketahui bahwa pemenangnya mendapat 10 suara. Jika diketahui juga bahwa tidak ada dua kontestan yang memperoleh jumlah suara yang sama, maka perolehan terbesar yang mungkin untuk kontestan dengan suara paling sedikit adalah ….

A. 3
B. 4
C. 5
D. 6

5. Dijual 100 lembar kupon, 2 di antaranya berhadiah. Ali mermbeli 2 lembar undian. Peluang Ali mendapat 2 hadiah adalah ….
   A. 1/50
   B. 1/100
   C. 1/200
   D. 1/4950
   E. 1/9900

6. Sebuah mata uang dan sebuah dadu dilantunkan bersama-sama. Bila diketahui mata uang muncul angka, maka peluang munculnya mata dadau lebih dari 2 adalah ….
   A. 1/6
   B. 1/4
   C. 3/8
   D. 2/3
   E. 5/8

7. Tersedia tujuh gambar yang berbeda akan dipilih empat gambar yang akan dipasang membentuk barisan memanjang. Banyaknya cara yang dapat dilakukan jika sebuah gambar yang terpilih harus selalu dipasang di ujung adaloah ….
   A. 420
   B. 504
   C. 520
   D. 720
   E. 710

8. Terdapat 3 orang Indonesia, 4 orang Belanda, dan 2 orang Jerman akan duduk dalam bangku panjang. Banyaknya susunan yang terjadi jika duduknya berkelompok menurut kewarganegaraan adalah ….
   A. 24
   B. 48
   C. 288
   D. 536
   E. 1728
9. Lima pasang suami istri akan duduk di 10 kursi secara memanjang. Banyaknya cara mengatur tempat duduk mereka sehingga setiap pasang suami istri duduk berdampingan adalah ….
   A. 3800
   B. 3820
   C. 3840
   D. 3900
   E. 3940
10. Dalam sebuah kotak berisi 15 telur, 5 telur diantaranya rusak. Untuk memisahkan telur baik dan telur yang rusak dilakukan pengetesan satu persatu tanpa pengembalian. Peluang diperoleh telur rusak ke-3 pada pengetesan ke 5 adalah ….
    A. $\frac{80}{1001}$
    B. $\frac{90}{1001}$
    C. $\frac{100}{1001}$
    D. $\frac{110}{1001}$
    E. $\frac{120}{1001}$

11. Di dalam kotak terdapat 18 bola identik (berbentuk sama), 5 berwarna hitam, 6 berwarna putih dan 7 berwarna hijau. Jika diambil dua bola secara acak, maka peluang yang terambil bola berwarna sama adalah ….
    A. $\frac{46}{153}$
    B. $\frac{13}{36}$
    C. $\frac{4}{105}$
    D. $\frac{55}{162}$
    E. $\frac{55}{152}$
12. Lima orang akan pergi ke pantai menggunakan sebuah mobil berkapasitas 6 tempat duduk. Jika hanya ada dua orang yang bisa menjadi sopir, maka banyaknya cara mengatur tempat duduk mereka di dalam mobil adalah ….
    A. 60
    B. 120
    C. 180
    D. 240
    E. 280
13. Suatu ***byte*** didefinisikan sebagai susunan angka yang terdiri dari 8 angka (digit), yaitu 0 atau 1. Contoh ***byte***: 01110111. Banyak jenis ***byte*** yang memuat angka 1tepat sebanyak 5 adalah ….
    A. 30
    B. 45
    C. 56
    D. 62
    E. 66

14. Lima orang guru akan ditempatkan pada tiga sekolah yang berbeda, 2 orang di sekolah pertama, 2 orang di sekolah kedua, dan 1 orang di sekolah ketiga. Banyak cara menempatkan kelima orang guru tersebut adalah ….
    A. 40
    B. 30
    C. 20
    D. 10
    E. 4
15. Empat bola bernomor 1, 2, 3, dan 4 diletakkan dalam sebuah kotak. Sebuah bola diambil secara acak dari kotak tersebut. Nomor yang muncul dicatat, kemudian bola dikembalikan ke kotak semula. Jika proses pengambilan bola dilakukan sampai tiga kali dengan cara serupa, maka peluang nomor bola yang terambil berjumlah 5 adalah ….
    A. 5/256
    B. 5/64
    C. 1/16
    D. 3/32
    E. 3/16
16. Suatu antrian pembelian tiket masuk pertandingan sepak bola terdiri dari 2012 orang. Jika di antara 2 pria paling sedikit terdapat 3 wanita, maka banyak pria pada antrian tersebut paling banyak adalah ….
    A. 501
    B. 502
    C. 503

D. 504

E. 505

17. Diketahui *abc* dan *def* adalah bilangan yang terdiri dari 3 angka (digit) sehingga *abc* + *def* = 1000. Jika *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, atau *f* tidak satupun yang sama dengan 0, maka nilai *a* + *b* + *c* + *d* adalah ….

A. 25

B. 26

C. 27

D. 28

E. 29

18. Suatu tes matematika terdiri dari 5 soal pilihan ganda dengan lima pilihan dan hanya ada satu pilihan yang benar. Jika Mulan menjawab soal secara menerka (secara acak atau asal-asalan), maka peluang tepat dua soal dijawab dengan benar adalah ….

A. 32/725

B. 32/625

C. 64/725

D. 64/625

E. 128/625

19. Dalam sebuah karung terdapat 60 kaos bernomor 11, 12, 13, …, 40. Ada dua kaos untuk setiap nomor (nomor 11 ada 2 kaos, nomor 12 ada 2 kaos, dan seterusnya). Jika diambil 2 kaos secara acak, maka peluang yang terambil adalah kaos yang bernomor sama adalah ….

A. 1/59

B. 2/35

C. 2/33

D. 2/31

E. 2/29

20. Sehabis belanja, ratina membawa pulang uang kembalian berupa 8 koin (uang receh), yang terdiri dari ratusan, lima-ratusan, dan ribuan. Total nilai uang kembalian adalah tiga ribu rupiah. Sayangnya, dalam perjalanan pulang salah satu uang koin jatuh (hilang). Jika peluang kehilangan untuk satu ratusan, satu lima-ratusan, dan satu ribuan adalah sama, maka peluang kehilangan satu koin lima-ratusan adalah ….

    a. 1/8
    b. 2/8
    c. 3/8
    d. 4/8
    e. 5/8

21. Sebuah kantong berisi 15 bola merah, 12 bola biru, dan 3 bola hijau. Diambil sebuah bola secara acak sebanyak 2 kali tanpa pengembalian. Peluang bola yang terambil merah pada pengambilan pertama dan hijau pada pengambilan kedua adalah ….

    A. 1/20
    B. 3/58
    C. 1/5
    D. 3/29
    E. 6/29

22. Lima orang anak akan naik mobil dengan kapasitas enam tempat duduk, yakni dua di depan termasuk pengemudi (sopir), dua di tengah, dan dua di belakang. Jika hanya ada dua orang yang bisa mengemudi, banyak cara mengatur tempat duduk mereka adalah ….
    A. 120
    B. 200
    C. 220
    D. 240
    E. 280

23. Di dalam suatu keranjang terdapat 12 apel Malang, dua diantaranya diketahui busuk. Jika diambil 3 apel secara acak (random), maka peluang tepat satu diantaranya busuk adalah … .
    A. $\frac{9}{22}$
    B. $\frac{5}{11}$
    C. $\frac{4}{11}$
    D. $\frac{9}{44}$
    E. $\frac{5}{22}$

24. Dua dadu dan sekeping mata uang dilempar sekaligus, kemudian dicatat sisi yang muncul. Jika diasumsikan munculnya setiap mata dadu seimbang dan munculnya setiap mata uang seimbang, maka

peluang akan didapatkan sisi angka mpada mata uang dan kedua mata dadu berjumlah 5 adalah …

A. $\frac{1}{16}$

B. $\frac{1}{18}$

C. $\frac{1}{36}$

D. $\frac{1}{72}$

25. Jika $n! = n. (n\text{-}1). (n\text{-}2). \ldots . 2. 1$, maka

$$1 . 1! + 2 . 2! + 3 . 3! + (n - 1) . (n - 1)! + n . n! = ...$$

A. $(n - 1)! + 1$

B. $(n + 1)! - 1$

C. $(n + 1)! + 1$

D. $n! + n$

26. Di atas meja terdapat dua set kartu. Setiap kartu terdiri atas 52 lembar dengan empat warna berbeda (merah, kuning, hijau, biru). Masing-masing warna terdiri atas 13 kartu bernomor 1 sampai dengan 13. Satu kartu akan diambil secara acak dari dua set kartu tersebut. Peluang terambil kartu berwarna merah atau bernomor 13 adalah ....

A. $\frac{5}{13}$

B. $\frac{8}{26}$

C. $\frac{19}{52}$

D. $\frac{31}{104}$

27. Pada sebuah laci terdapat beberapa kaos kaki berwarna putih dan berwarna hitam. Jika dua kaos kaki diambil secara acak, maka peluang terpilihnya kedua kaos kaki berwarna putih adalah ½. Jika banyak kaos kaki berwarna hitam adalah genap, maka paling sedikit kaos kaki berwarna putih adalah ....

    A. 12
    B. 15
    C. 18
    D. 21

28. Sebuah wadah memuat 5 bola merah dan 3 bola putih. Seseorang mengambil bola-bola tersebut sebanyak 3 kali, masing-masing du8a bola setiap pengambilan tanpa pengembalian. Peluang bahwa pada setiap pengambilan, bola yang terambil berbeda warna adalah ....

    A. $\frac{1}{448}$
    B. $\frac{7}{280}$
    C. $\frac{1}{56}$
    D. $\frac{1}{7}$

29. Diberikan bilangan asli dua digit. Peluang bahwa bilangan tersebut memiliki digit penyusun prima dan bersisa 5 jika dibagi 7 adalah ....

    A. $\frac{1}{45}$
    B. $\frac{1}{30}$
    C. $\frac{1}{8}$
    D. $\frac{1}{4}$

30. Terdapat empat kotak yang dinomori 1 sampai 4. Setiap kotak dapat diisi maksimum 5 koin dengan syarat kotak yang bernomor lebih kecil. Jika tidak boleh ada kotak yang kosong, banyak cara pengisian koin yang mungkin ke dalam keempat kotak t ersebut adalah ....
   A. 25
   B. 70
   C. 252
   D. 625

31. Untuk setiap buku baru yang datang, seorang pustakawan bertugas untuk menempel label nomor di bagian samping buku dan menyampul buku tersebut dengan plastik transparan. Proses menempel label dan menyampul ini disebut pengerjaan. Agar label nomor tidak cepat rusak, proses penyampulan suatu buku harus dilakukan setelah menempel label nomornya. Jika ada tiga buku baru berbeda yang harus dikerjakan, banyak kemungkinan urutan pengerjaan yang dapat dilakukan oleh pustakawan tersebut adalah ....
   A. 8
   B. 48
   C. 90
   D. 720

32. *Password* akun media sosial Ahmad terdiri dari enam karakter berbeda penyusun kata "NKRIgo". Ahmad memintamu untuk menebak *password*-nya dengan memberikan dua informasi tambahan, yaitu "g" tidak bersebelahan dengan "o", dan "R" bersebelahan dengan "I". Jika kamu menggunakan seluruh informasi tersebut dengan baik, peluangmu untuk dapat langsung menebak dengan benar adalah ....
    A. 1/36
    B. 1/72
    C. 1/144
    D. 1/720

33. Banyak cara menugaskan 5 pekerjaan berbeda ke 4 orang pegawai berbeda sedemikian sehingga setiap pegawai ditugaskan ke paling sedikit satu pekerjaan adalah...
    A. 20
    B. 120
    C. 200
    D. 240

34. Banyak bilangan dari 1 sampai 500 yang tidak habis dibagi 3, 4, dan 6 adalah...
    A. 41
    B. 320
    C. 459
    D. 500

35. Di perpustakaan FKIP Unram terdapat 3 jenis buku berbeda: buku Matematika Dasar, Logika Matematika, dan Aljabar Elementer. Perpustakaan menyediakan sedikitnya 10 buah buku untuk masing-masing jenisnya. Berapa banyak cara memilih 10 buah buku?

    A. 12
    B. 23
    C. 32
    D. 66

B. Soal Tipe Isian Singkat

1. Alex selalu berbohong pada hari Kamis, Jum'at dan Sabtu. Pada hari-hari lain Alex selalu jujur. Di lain pihak, Frans selalu berbohong pada hari-hari Minggu, Senin dan Selasa, dan selalu jujur pada hari-hari lain. Pada suatu hari, keduanya berkata: "Kemarin saya berbohong". Hari mereka mengucapkan perkataan tersebut adalah hari ….

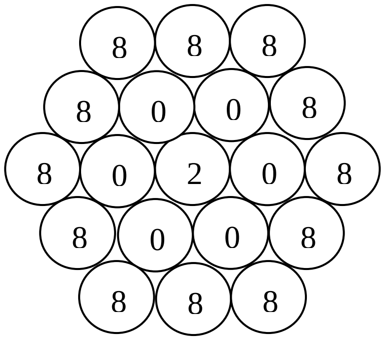
2. Bapak dan Ibu Zaenal sedang merencanakan nama anak mereka yang akan segera lahir dengan nama yang terdiri dari 3 kata dengan nama belakang Zaenal. Mereka menginginkan inisial/singkatan nama anak tersebut adalah terurut menurut abjad dengan tak ada huruf yang berulang, sebagai contoh *GTZ,* tetapi mereka tidak mau *TGZ*. Banyak pilihan inisial nama yang dapat dipergunakan adalah ...

3. Seorang pedagang menjajakan 10 jeruk manis dan 5 jeruk masam yang kesemuanya terlihat sama dan diletakkan dalam satu

keranjang yang sama. Jika Ana ingin membeli dua buah jeruk dan mengambilnya sekaligus secara sembarang, maka peluang Ana akan memperoleh dua jeruk dengan rasa yang sama adalah ....

4. Bilangan-bilangan 3, 4, dan 7 disubstitusikan sembarang dan boleh berulang untuk mengantikan konstanta-konstanta *a*, *b*, dan *c* pada persamaan $ax^2 + bx + c = 0$. Peluang persamaan kuadrat itu mempunyai akar-akar real adalah ...

5. Perhatikan gambar di samping! Dengan mulai dari angka 2 pada lingkaran di tengah, bilangan 2008 dapat dibentuk dari pergerakan satu lingkaran ke satu lingkaran lainnya jika lingkarannya saling bersinggungan. Banyak cara untuk membentuk bilangan 2008 adalah ....



6. Sebuah kubus akan diberi warna sedemikian sehingga setiap dua sisi yang berdekatan (yakni dua sisi yang dipisahkan oleh tepat satu rusuk) diberi warna berbeda. Jika diberikan 5 warna yang berbeda, maka banyak cara yang berbeda untuk mewarnai kubus adalah ….

7. Lima permen identic (berbentuk sama), satu rasa apel, dua rasa jeruk dan dua rasa jahe akan dibagikan kepada lima sekawan Anto, Bono, Carli, Dede dan Edo, sehingga masing-masing mendapat satu permen. Peluang Anto mendapat permen rasa jahe adalah ….

8. Tersedia beberapa angka 2, 0, dan 1. Angka dua ada sebanyak lima buah masing-masing berwarna merah, hijau, kuning, biru dan nila. . Angka nol dan satu masing-masing ada sebanyak empat buah dengan warna masing-masing merah, hijau, kuning, dan biru. Selanjutnya menggunakan angka-angka tersebut akan dibentuk bilangan 2011 sehingga angka-angka yang bersebelahan tidak boleh sewarma. Contoh pewarnaan yang dimaksud: 2(merah) 0 (hijau) 1 (merah) 1 (biru). Contoh bukan pewarnaan yang dimaksud: 2(merah) 0 (hijau) 1 (hijau) 1 (biru). Banyaknya bilangan 2011 dengan komposisi pewarnaan tersebut adalah ….

9. Sebuah kotak berisi 500 kelereng berukuran sama yang terdiri dari 5 warna dimana masing-masing kelereng sewarna berjumlah 100. Minimum banyaknya kelereng yang harus diambil secara acak sedemikian sehingga kelereng yang terambil dijamin memuat sedikitnya 5 kelereng sama adalah ….

10. Banyak himpunan bagian dari himpunan $\{a, b, c, d, e, f\}$ yang memuat sedikitnya satu huruf vocal adalah ….

11. Suatu *string* terdiri dari 10 angka 0, 1, atau 2. Bobot *string* didefinisikan sebagai jumlah angka-angka dalah *string* tersebut. Sebagai contoh, *string* 0002002001 mempunyai bobot 5. Banyak *string* dengan bobot 4 adalah ….

12. Tita memiliki tetangga baru yang memiliki 2 anak. Jika salah satu anak tetangga baru tersebut adalah perempuan, maka besar peluang anak yang lain adalah laki-laki adalah …

13. Delapan buku yang berbeda akan dibagikan kepada tiga orang siswa *A*, *B*, dan *C* sehingga berturut-turut mereka menerima 4 buku, 2 buku, dan 2 buku. Banyak cara pembagian buku tersebut adalah ….

14. Tersedia 10 loket pelayanan pelanggan pada sebuah bank. Terdapat sejumlah pelanggan yang sedang berada dalam satu baris antrian. Peluang bahwa 4 orang pertama pada antrian dilayani di loket yang berbeda, dan orang ke-5 pada antrian dilayani di loket yang sama dengan salah satu dari 4 orang sebelumnya adalah ….

15. Masing-masing tas dalam satu kotak besar berisi buah-buahan sebanyak 25 buah. Diketahui 60% dari tas tersebut berisi 5 jeruk dan 20 apel, sedangkan 40% sisanya berisi 15 jeruk dan 10 apel. Diambil satu tas secara acak dan dari tas tersebut diambil satu buah secara acak pula.
    a. Berapa peluang terambilnya apel?
    b. Jika diketahui bahwa yang terpilih adalah apel, berapa peluang terambilnya tas yang berisi 5 jeruk dan 20 apel?

16. Sebuah keluarga besar beranggotakan 14 orang anak yang terdiri dari dua kelahiran kembar tiga identik, tiga kelahiran kembar dua identik, dan dua anak yang lain. Bila kembar identik tak dapat

dibedakan, maka tentukan banyak pose foto berdiri dalam satu baris pada 14 anak tersebut.

17. Sebuah klub bulu tangkis mempunyai 35 anggota terdiri dari 15 anak laki-laki dan 20 anak perempuan. Klub akan membentuk 10 pasangan ganda campuran. Tentukan banyaknya cara yang mungkin untuk membentuk 10 pasangan ganda campuran.
18. Pada setiap titik sudut segitiga ABC diletakkan sebuah titik. Kemudian pada sisi AB diletakkan 4 buah titik, pada sisi BC diletakkan 5 buah titik, dan pada sisi AC diletakkan 7 buah titik. Tentukan banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dari titik-titik tersebut.
19. Sepuluh orang akan berpergian dengan dua mobil yang masing-masing berkapasitas 6 orang dan 7 orang. Jika setiap mobil harus berisi sekurang-kurangnya 2 orang, maka tentukan banyak kemungkinan mereka berdistribusi dalam 2 mobil tersebut.
20. Lima dadu akan dilempar satu demi satu, lalu hasil kelima angka yang muncul akan dihitung. Manakah yang lebih besar peluang terjadinya hasil kali 180 atau hasil kali 144? jelaskan!

DAFTAR PUSTAKA

Andreescu, T., & Feng, Z. (2004). *A Path to Combinatorics for Undergraduates Counting Strategies*. USA: Birkhauser.

Brain L.J & Engelhart. (1992). *Introduction to Probability and Statistic*. California: Duxbury Press.

Djumanta, W. & R. Sudrajat. (2008). *Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika untuk Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah Kelas XI Program Ilmu Pengetahuan Alam*. Jakarta: Pusat Perbukuan Depdiknas

Grinstead, C.M. & J.L. Snel. *Introduction to Probability*. www.dartmouth.edu/~chance . diunduh tanggal 12 Oktober 2009.

Julie, H., Apriani, M. S., & Krisnamurti, C. N. (2017) Teori Peluang. Yogyakarta: Sanata Dharma University Press.

Johnson, A. (1995). *Geometry & Its Applications Geometric Probability*. USA: COMAP Inc.

Lipschutz, S.R. & G.G. Hall. (1988). *Matematika Hingga* (terjemahan oleh Margha). Jakarta: Erlangga

Schinazi, R. B. (2022). *Probability with Statistical Applications* (Third Edit). Switzerland: Birkhauser.

Sudyarto, N. & Maryanto. (2008). *Matematika 2 untuk SMA atau MA Kelas XI Program IPA*. Jakarta: Pusat Perbukuan Depdiknas

Suryanto. (2000). *Paket Pembinaan untuk Siswa Penggemar Matematika: Peluang*. Yogyakarta: PPPG Matematika